512.9432
B77t:G

Theorie der Determinanten

und

ihre hauptsächlichen Anwendungen.

Von

Dr. Francesco Brioschi,

ordentlichem Professor der angewandten Mathematik a d. U. Pavia.

Aus dem Italiänischen übersetzt.

Mit einem Vorwort

von

Professor Schellbach.

BERLIN, 1856.

Verlag von Duncker & Humblot.

THE UNIVERSITY

OF ILLINOIS

LIBRARY

512.9432

~~512.83~~

B77L:G

MATHEMATICS

DEPARTMENT

Theorie der Determinanten

und

ihre hauptsächlichen Anwendungen.

Von

Dr. Francesco Brioschi,

ordentlichem Professor der angewandten Mathematik a. d. U. Pavia.

Aus dem Italiänischen übersetzt.

Mit einem Vorwort

von

Professor Schellbach.

BERLIN, 1856.

Verlag von Duncker & Humblot.

UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

512.9432
512.83
B77T:G

Vorwort.

In der deutschen Literatur findet sich bis jetzt kein Lehrbuch, welches, ähnlich wie die Schrift ***Brioschi's***, die Resultate der zahlreichen, meist in deutschen, französischen und englischen Zeitschriften zerstreuten Arbeiten über die Determinanten übersichtlich und mit sorgfältiger Verweisung auf die Quellen zusammenstellte, und dadurch grösseren Kreisen zugänglich machte. Die vorliegende, correkte Uebersetzung des italiänischen Werkes ist vollständig geeignet, diese Lücke auszufüllen; man wird es daher dem Uebersetzer danken, dass er seinerseits dazu beigetragen hat, das Instrument kennen zu lehren, durch welches jetzt die Mathematiker ganze Reihen von Begriffen und Gedanken auf einmal in ihre Operationen einführen.

Berlin, im Juli 1856.

Schellbach.

10 0 14 Z.T.
42
279438

Vorrede des Verfassers.

> For what is the theory of determinants? It is an algebra upon algebra; a calculus which enables us to combine and foretell the results of algebraical operations, in the same way as algebra itself enables us to dispense with the performance of the special operations of arithmetic.
>
> **Sylvester,** Phil. Mag. 1851.

Die Untersuchungen von ***Cramer*** und ***Bezout***[1]) über die Auflösung der lineären algebraischen Gleichungen und über die Elimination, bezeichnen den Ursprung der Theorie derjenigen Functionen, welche, zuerst mit dem Namen ***Resultanten*** belegt, nun allgemein ***Determinanten*** genannt werden. Das Bildungsgesetz der Determinanten rührt von diesen Mathematikern her; sie schlossen dasselbe aus Analogieen, indem sie die Form der Resultate betrachteten, welche die Rechnungen mit zwei und drei Gleichungen mit eben so vielen Unbekannten lieferten. Dieses Gesetz bildet auch den Hauptgegenstand der Arbeiten von ***Laplace*** und ***Vandermonde***[2]) über die Elimination, in welchen, als Corollarien dieses Gesetzes, sowohl die Eigenschaft der Determinanten bewiesen wird, nach welcher sie ihr Zeichen wechseln oder verschwinden, wenn gewisse Elemente permutirt oder einander gleichgesetzt werden, als die andere, nach welcher eine Determinante irgend einer Ordnung aus der Summe von Produkten von Determinanten niedrigerer Ordnung entstehen kann (§. 3). In

1) Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Appendice. — 1750. — Histoire de l'Académie Royale des Sciences. 1764.

2) Histoire de l'Académie Royale des Sciences. 1772. Seconde Partie.

den Abhandlungen von ***Lagrange*** [1]) über die Rotation eines festen Körpers und über die dreiseitigen Pyramiden wird von Determinanten dritter Ordnung Gebrauch gemacht; und hier finden sich in Bezug auf diese Determinanten einige Eigenschaften ausgesprochen, die später auf Determinanten von beliebiger Ordnung ausgedehnt worden sind. Diese Eigenschaften können auf die folgenden zurückgeführt werden: 1) das Quadrat einer Determinante ist selbst eine Determinante; 2) die Determinante mit reciproken Elementen einer Determinante dritter Ordnung ist gleich dem Quadrat dieser letzten Determinante. (§§. 5, 6.) ***Gauss*** [2]) hat in seinen Untersuchungen über die lineären und ternären Formen die erste dieser Eigenschaften verallgemeinert, indem er für die Determinanten zweiter und dritter Ordnung bewies, dass das Produkt zweier Determinanten selbst eine Determinante ist. In seinem klassischen Werke ist das Wort ***Determinante*** zuerst in die Wissenschaft eingeführt. Die Sätze von ***Lagrange*** und ***Gauss*** wurden von ***Binet*** [3]) auf die Summe von Produkten einer beliebigen Anzahl Determinanten zweiter, dritter und vierter Ordnung ausgedehnt, aber die Verallgemeinerung dieser Sätze für Determinanten von beliebiger Ordnung rührt von ***Cauchy*** [4]) her. Die beiden ersten Abschnitte des zweiten Theiles seiner wichtigen Abhandlung: „***Sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir etc.***" enthalten die allgemeine Regel für die Multiplication der Determinanten und die Haupteigenschaften der Determinanten mit reciproken Elementen, in den beiden andern Abschnitten sind die wichtigsten Sätze über die ***Unterdeterminanten*** und über die Determinanten aus solchen Determinanten bewiesen, welche von diesem Mathematiker ***derivirte*** Determinanten genannt worden sind. An die Abhandlung ***Cauchy's*** schliessen sich verschiedene Arbeiten an, welche Anwendungen der bis zu dieser Zeit bekannten Sätze enthalten [5]), und erst im Jahre 1841 legte der berühmte ***Jacobi*** [6]) in der Abhandlung: „***De formatione et proprietatibus determinantium***" den Grund zu einer Theorie der Determinanten. Auf diese folgte die Abhandlung desselben Mathe-

1) Nouveaux mémoires de l'Académie Royale de Berlin. 1775.
2) Recherches Arithmétiques. 1807.
3) Journal de l'École Polytechnique. Cahier seizième. 1813.
4) Journal de l'École Polytechnique. Cahier dix-septième. 1815.
5) Crelle. Journal für die Mathematik. Band 12. — Liouville. Journal de Mathématiques. T. 2. etc.
6) Crelle. Journal für die Mathematik. Band 22.

matikers: „*De determinantibus functionalibus*" in welcher er, mit Hülfe der Differentialrechnung und einiger bekannten, die Zusammensetzung der Functionen betreffenden Eigenschaften, dieser Theorie einen der wichtigsten Theile hinzufügte (§. 10.). Auch die ersten Untersuchungen über die *überschlagenen* Determinanten rühren von *Jacobi*[1]) her; sie sind von *Cayley*[2]) in zwei interessanten Abhandlungen vervollständigt und erweitert worden. Die neuesten Arbeiten über die Determinanten sind Anwendungen ihrer Eigenschaften auf die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Theorie der Gleichungen, die Zahlentheorie u. s. w., man verdankt sie *Jacobi*, *Cayley*, *Sylvester*, *Cauchy*, *Hesse*, *Hermite*, *Borchardt*, *Salmon*, *Malmstéen*, *Joachimsthal*[3]) u. s. w.

Die Mannigfaltigkeit und Wichtigkeit der Anwendungen der Theorie der Determinanten lassen die Studirenden den Wunsch und das Bedürfniss fühlen, Bücher zu besitzen, in denen die Prinzipien dieses Zweiges der Analysis auseinander gesetzt sind. Die Abhandlungen *Jacobi's* und die schätzenswerthe Schrift von *Spottiswoode*[4]): „*Elementary theorems relating to determinants*" sind die einzigen Werke, an welche sich bis jetzt Diejenigen wenden können, welche das Studium dieser Theorie beginnen wollen. Wir halten daher die Veröffentlichung eines neuen Buches über diesen Gegenstand nicht für unpassend.

---

1) Crelle. Journal für die Mathematik. Band 2. Ueber die Pfaff'sche Integrations-Methode.

2) Crelle. Journal für die Mathematik. Bände 32 und 38.

3) Jacobi. Mathematische Werke. — Cauchy. Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique. — Salmon. On the higher plane curves. — Crelle's Journal. — Journal de Liouville. — Philosophical Magazine. — The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. — Annali di Tortolini.

4) London. George Bell. 1851.

März 1854.

Inhalt.

§. 1. Definitionen und Bezeichnungen . . . . . Pag. 1

§. 2. Bildungsgesetz der Determinanten . . . . . - 2

§. 3. Allgemeine Eigenschaften der Determinanten . . . . . - 3

§. 4. Von der Auflösung der lineären algebraischen Gleichungen . . . . . - 10

§. 5. Multiplication der Determinanten und deren Erhebung auf Potenzen . . . . - 18

§. 6. Determinanten mit reciproken Elementen, oder Determinanten von Determinanten - 29

§. 7. Von den Eigenschaften der Unterdeterminanten . . . . . - 37

§. 8. Von den überschlagenen und symmetrischen Determinanten . . . . . - 47

§. 9. Von den Determinanten der Wurzeln der algebraischen Gleichungen und den Determinanten der particulären Integrale der lineären Differentialgleichungen . - 63

§. 10. Von den Functional-Determinanten . . . . . - 73

§. 11. *Hesse's* Determinante . . . . . - 93

Theorie der Determinanten und ihre hauptsächlichen Anwendungen.

§. 1. Definitionen und Bezeichnungen.

Das Symbol $a_{r,s}$ bezeichne im Allgemeinen eine Grösse, welche ihren Werth ändert, wenn die Indices r, s sich ändern; und es werde dabei vorausgesetzt, dass die Indices selbst die Werthe 1, 2, 3 ..... n annehmen können.

Determinante heisst der Ausdruck, welcher aus dem Aggregat der 1. 2. 3..... n Produkte entsteht, welche man erhält, wenn man die Indices in dem Produkte:

$$a_{r_1,s_1} a_{r_2,s_2} \ldots\ldots a_{r_n,s_n}$$

auf alle mögliche Weise permutirt und vor diese Produkte bestimmte Vorzeichen setzt.

Die Grössen $a_{r,s}$ heissen die *Elemente* der Determinante; die Elemente $a_{r,s}$ und $a_{s,r}$ nennt man *conjugirt*, und die Elemente $a_{1,1}\ a_{2,2} \ldots\ldots a_{n,n}$ heissen *Hauptelemente*.

Die allgemein angenommene Bezeichnung für die Determinanten, von welcher auch *Laplace*, *Cauchy*, *Jacobi* Gebrauch gemacht haben, ist der symbolische Ausdruck der Definition, nämlich:

$$\Sigma(\pm a_{1,1}\ a_{2,2} \ldots\ldots a_{n,n}).$$

Diese Bezeichnung hat vor den andern den Vortheil der Kürze, aber wenn man specielle Operationen an den Elementen der Determinante ausführen muss, oder wenn einige ihrer Elemente besondere Werthe annehmen, wird es angemessen sein, von der folgenden Bezeichnungsweise Gebrauch zu machen:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\ a_{1,2} \ldots\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1}\ a_{2,2} \ldots\ldots a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\ a_{n,2} \ldots\ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

in welcher alle Elemente ausgeschrieben sind.

Die Elemente, welche unter einander stehen, heissen „*Elemente derselben Colonne*", und diejenigen, welche neben einander stehen, heissen „*Elemente derselben Reihe.*" Es ist aus der Definition klar, dass wenn man irgend ein Element $a_{r,s}$ betrachtet, in jedem der Produkte, in welche das Element eingeht, sich kein anderes derjenigen Elemente finden kann, welche in derselben Colonne oder in derselben Reihe mit ihm stehen.

Nach einer dritten Art der Bezeichnung, welche von Herrn *Sylvester* herrührt, und einige Aehnlichkeit mit der schon von *Vandermonde* angenommenen Me-

thode hat, wird die Grösse $a_{r,s}$ durch zwei Buchstaben a_r, α_s ausgedrückt, welche einzeln genommen weder eine Grösse noch eine Rechnungsoperation darstellen, sondern nur den *Schatten* einer Grösse. Mit Einführung dieser idealen Elemente stellt *Sylvester* die Determinante unter einer kürzern Form, als die zuletzt genannte, dar, indem er die beiden Reihen der Elemente in folgender Weise unter einander schreibt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n \end{vmatrix}$$

und der algebraische Werth dieser Determinante wird ausgedrückt durch:

$$\Sigma \pm a_1 \alpha_{r_1} . a_2 \alpha_{r_2} \ldots\ldots a_n \alpha_{r_n}$$

indem man beachtet, dass die Grössen $r_1, r_2 \ldots\ldots r_n$ unter einander verschieden sind und alle Werthe $1, 2 \ldots\ldots n$ annehmen können.

Die Ordnung einer Determinante folgt aus der Zahl ihrer Hauptelemente, daher wird die obige Determinante von der $n$ten Ordnung sein.

§. 2. Bildungsgesetz der Determinanten.

Das Bildungsgesetz der Determinanten besteht in dem Gesetze der Vorzeichen, welche man den verschiedenen Produkten des Aggregates beilegen muss, aus denen die Determinanten selbst entstehen. Dieses Gesetz, welches das gewöhnliche ist, wenn es sich um Permutationen handelt, legt einem jedem dieser Produkte ein positives oder negatives Zeichen bei, je nachdem die Anzahl der ersten Indices, welche in dem Produkte:

$$a_{1,1} . a_{2,2} \ldots\ldots a_{n,n}$$

permutirt worden sind, um das in Rede stehende Produkt zu erhalten, gerade oder oder ungerade ist; indem man annimmt, dass das erste Produkt positiv sei. So wird man z. B. haben:

$$\Sigma(\pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}) = a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3} + a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3} - a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3} - a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3} - a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3} .$$

Aus der Betrachtung des zweiten Gliedes dieser Gleichung folgt leicht:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}(a_{2,2}\, a_{3,3} - a_{3,2}\, a_{2,3}) - a_{2,1}(a_{1,2}\, a_{3,3} - a_{3,2}\, a_{1,3}) + a_{3,1}(a_{1,2}\, a_{2,3} - a_{2,2}\, a_{1,3})$$

oder auch:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

eine Relation, welche zeigt, in welcher Weise man zu dem algebraischen Werthe einer Determinante gelangen kann, welche auf die zweite der im §. 1 angegebenen Methoden geschrieben ist. Nach dem oben erklärten Gesetze der Vorzeichen ist es klar, dass man analog dem obigen Resultate im Allgemeinen wird haben müssen:

$$(1.) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots - (-1)^n a_{n,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

und wie in der Entwicklung einer Determinante von der $n$ten Ordnung irgend ein Element $a_{r,s}$ multiplicirt sein wird mit der Determinante $(n-1)$ter Ordnung, welche man erhält, indem man die Elemente der $r$ten Reihe und der $s$ten Colonne der gegebenen Determinante auslässt, und diesem Produkte ein positives Vorzeichen beilegt, wenn die Zahlen r und s beide gerade oder beide ungerade sind, und ein negatives, wenn die eine gerade und die andere ungerade ist.

Beispiel 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

der Ausdruck des doppelten Flächeninhalts eines Dreieck's, dessen Ecken die Coordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 haben.

2. Nimmt man an:

$$x_1 = a_1 + a_2 \qquad x_2 = b_1 + b_2 \qquad x_3 = c_1 + c_2$$
$$y_1 = a_1 a_2 \qquad y_2 = b_1 b_2 \qquad y_3 = c_1 c_2$$

so hat man:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 + a_2 & a_1 a_2 \\ 1 & b_1 + b_2 & b_1 b_2 \\ 1 & c_1 + c_2 & c_1 c_2 \end{vmatrix} = (a_1 - b_2)(b_1 - c_2)(c_1 - a_2) + (a_2 - b_1)(b_2 - c_1)(c_2 - a_1)$$

und wenn alsdann a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 die Entfernungen darstellen, welche sechs auf einer geraden Linie liegende Punkte unter sich haben, so drückt obige Determinante, gleich Null gesetzt, aus, dass die sechs Punkte in Involution stehen.

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \text{u. s. w.}$$

Wenn $x_1, y_1 z_1; x_2, y_2, z_2 \ldots$ die Coordinaten von vier Punkten darstellen, so stellt die obige Determinante den Inhalt der Pyramide dar, deren Ecken in den vier Punkten liegen.

§. 3. Allgemeine Eigenschaften der Determinanten.

Aus dem Bildungsgesetz einer Determinante folgt, dass der Werth und das Vorzeichen derselben sich nicht ändern, wenn man die Elemente der Colonnen in derselben Ordnung als Elemente der Reihen nimmt, und die Elemente der Reihen als Elemente der Colonnen. Das heisst, es wird identisch die Gleichung bestehen:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ebenso ist es klar, dass wenn man zwei Reihen oder zwei Colonnen einer Determinante unter einander vertauscht, man die Vorzeichen der Glieder ihres algebraischen Werthes ändert, weil dadurch in jedem von ihnen eine Permutation in den ersten Indices zweier Elemente bewirkt wird; dagegen bleibt der absolute Werth der Determinante constant, wesshalb man haben wird:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,r} & \ldots & a_{1,s} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,r} & \ldots & a_{2,s} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,r} & \ldots & a_{n,s} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,s} & \ldots & a_{1,r} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,s} & \ldots & a_{2,r} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,s} & \ldots & a_{n,r} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Wenn daher die Indices r, s unter sich gleich wären, so würde man haben:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,r} & \ldots & a_{1,r} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,r} & \ldots & a_{2,r} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,r} & \ldots & a_{n,r} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Das heisst, wenn zwei Reihen oder zwei Colonnen einer Determinante identisch werden, so ist die Determinante Null. Die Determinante wird auch gleich Null sein, wenn alle Elemente derselben Reihe oder derselben Colonne Null sind.

Wenn die Elemente einer Reihe oder einer Colonne einer Determinante einen gemeinsamen Factor enthalten, so wird derselbe in jedem der Produkte erscheinen, aus welchen ihr algebraischer Werth besteht, und in Folge dessen kann er als ein gemeinschaftlicher Factor vor alle diese Terme gesetzt werden; daher wird man haben:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ \alpha a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Analog wird man die Elemente einer Reihe oder einer Colonne mit einem gemeinsamen Factor multipliciren können, wenn man diesen nur als Divisor zur Determinante setzt.

Wenn die Elemente einer Reihe oder einer Colonne einer Determinante aus der Summe zweier oder mehrerer Grössen bestehen, so wird dieselbe der Summe von ebenso vielen Determinanten gleich sein, als solcher Grössen vorhanden sind, und man wird daher z. B. haben:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+\alpha_1 & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1}+\alpha_2 & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ a_{n,1}+\alpha_n & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \alpha_2 & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ \alpha_n & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Wir bemerken, dass wenn α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ den Elementen einer andern Colonne beziehlich gleich wären oder nur durch einen constanten Factor davon verschieden, die zweite Determinante des zweiten Gliedes Null sein würde.

Beispiel 1.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2\,y^2\,z^2} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & xyz^2 & xy^2z \\ y & xyz^2 & 0 & x^2yz \\ z & xy^2z & x^2yz & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Wenn x, y, z die Längen der Seiten eines Dreieckes darstellen, wird diese Determinante das 16fache Quadrat seines Flächeninhaltes darstellen.

2. Es ist die Identität der beiden Determinanten klar:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & s_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

Wenn man voraussetzt, dass s_0, s_1 .... die Summe der nullten, ersten ..... Potenz der Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

seien, so ist die obige Determinante, gleich Null gesetzt, die Bedingung dafür, dass diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe. In der That kann man diese Determinante nach der obigen Bemerkung so schreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & s_0 & s_1 + as_0 & s_2 + as_1 + bs_0 \\ s_0 & s_1 + as_0 & s_2 + as_1 + bs_0 & s_3 + as_2 + bs_1 + cs_0 \\ s_1 & s_2 + as_1 & s_3 + as_2 + bs_1 & s_4 + as_3 + bs_2 + cs_1 \end{vmatrix}$$

und zufolge den bekannten Relationen zwischen den Coefficienten und den Summen der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung, wird man haben:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 3 & 2a & b \\ 3 & 2a & b & 0 \\ a & 2b & 3c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$a^2 b^2 - 4b^3 - 4a^3 c - 27c^2 + 18abc$$

welcher Ausdruck, gleich Null gesetzt, genau die obengenannte Bedingung giebt.

Betrachtet man die Gleichung (1) oder die allgemeinere:

$$P = a_{1,s}\ \alpha_{1,s} + a_{2,s}\ \alpha_{2,s} + \cdots + a_{n,s}\ \alpha_{n,s}$$

in welcher P die Determinante auf der linken Seite der Gleichung (1) darstellt, während zur Abkürzung:

$$(2.) \qquad \alpha_{r,s} = \pm \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,s-1} & a_{1,s+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,s-1} & a_{2,s+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,s-1} & a_{r-1,s+1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,s-1} & a_{r+1,s+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

gesetzt ist, so sind $\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s} \ldots$ offenbar unabhängig von den Elementen $a_{1,s}, a_{2,s} \ldots$; darnach wird man die Gleichungen haben:

$$\alpha_{1,s} = \frac{dP}{da_{1,s}}, \quad \alpha_{2,s} = \frac{dP}{da_{2,s}}, \ldots \alpha_{n,s} = \frac{dP}{da_{n,s}},$$

und folglich:

$$(3.) \qquad \begin{aligned} P &= a_{1,s}\frac{dP}{da_{1,s}} + a_{2,s}\frac{dP}{da_{2,s}} + \cdots + a_{n,s}\frac{dP}{da_{n,s}} \\ &= a_{r,1}\frac{dP}{da_{r,1}} + a_{r,2}\frac{dP}{da_{r,2}} + \cdots + a_{r,n}\frac{dP}{da_{r,n}} \end{aligned}$$

Setzt man voraus, dass r, s ungleich unter sich sind, so würde der Ausdruck:

$$a_{1,r}\frac{dP}{da_{1,s}} + a_{2,r}\frac{dP}{da_{2,s}} + \cdots + a_{n,r}\frac{dP}{da_{n,s}}$$

die Determinante P darstellen, wofern in demselben für die Elemente $a_{1,s}\ a_{2,s}$ .... beziehlich die Elemente $a_{1,r}\ a_{2,r}$ ..... substituirt werden. Diese Elemente bilden aber je eine Colonne der Determinante P; unser Ausdruck stellt also eine Determinante mit zwei identischen Colonnen dar, und ist also gleich Null. Das heisst, man hat:

$$(4.)\qquad \begin{aligned} a_{1,r}\frac{dP}{da_{1,s}} + a_{2,r}\frac{dP}{da_{2,s}} + \cdots + a_{n,r}\frac{dP}{da_{n,s}} &= 0 \\ a_{r,1}\frac{dP}{da_{s,1}} + a_{r,2}\frac{dP}{da_{s,2}} + \cdots + a_{r,n}\frac{dP}{da_{s,n}} &= 0. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\frac{dP}{da_{r,s}}$ enthält weder das Element $a_{r,s}$ noch eines von den Elementen, welche zu derselben Reihe oder Colonne mit ihm in der Determinante P gehören, d. h. er enthält keins von den Elementen, welche die $r$te Reihe oder die $s$te Colonne dieser Determinante bilden. Hieraus folgt, dass die Gleichungen Statt finden werden:

$$(5.)\qquad \frac{d^2P}{da^2_{r,s}} = 0\ ,\ \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s}} = 0\ ,\ \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r,s_1}} = 0.$$

Die Determinante $\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$ von der $(n-2)$ten Ordnung erhält man aus der Determinante P, wenn man zwei Reihen und zwei Colonnen dieser letzteren auslässt; nämlich, die $r$te und $r_1$te Reihe, die $s$te und $s_1$te Colonne. Wenn aber in der Determinante P die $s$te und $s_1$te Colonne unter sich vertauscht werden, ändert die Determinante selbst das Zeichen, und die Determinante $\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$ wird $-\frac{d^2P}{da_{r,s_1}\,da_{r_1,s}}$; daher wird man im Allgemeinen haben:

$$(6.)\qquad \frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}} = -\frac{d^2P}{da_{r,s_1}\,da_{r_1,s}}.$$

Die Ausdrücke $\frac{dP}{da_{r,1}}$, $\frac{dP}{da_{r,2}}\cdots$, als Determinanten der $(n-1)$ten Ordnung betrachtet, ergeben die folgenden Gleichungen, welche der Gleichung (3) analog sind:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} \frac{dP}{da_{r,1}} &= a_{s,1}\frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s,1}} + a_{s,2}\frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s,2}} + \cdots + a_{s,n}\frac{d^2P}{da_{r,1}\,da_{s,n}} \\ \frac{dP}{da_{r,2}} &= a_{s,1}\frac{d^2P}{da_{r,2}\,da_{s,1}} + a_{s,2}\frac{d^2P}{da_{r,2}\,da_{s,2}} + \cdots + a_{s,n}\frac{d^2P}{da_{r,2}\,da_{s,n}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dP}{da_{r,n}} &= a_{s,1}\frac{d^2P}{da_{r,n}\,da_{s,1}} + a_{s,2}\frac{d^2P}{da_{r,n}\,da_{s,2}} + \cdots + a_{s,n}\frac{d^2P}{da_{r,n}\,da_{s,n}} \end{aligned}$$

in welchen vorausgesetzt wird, dass r und s von einander verschieden sind. Substi-

tuirt man diese Werthe auf der rechten Seite von (3) und beachtet man dass nach (5), (6) ist:

$$\frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,1}} = 0 \quad , \quad \frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s,2}} = 0 \ldots \quad , \quad \frac{d^2P}{da_{r,n}da_{s,n}} = 0 \, ,$$

$$\frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,2}} = -\frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s,1}} \quad , \quad \frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,3}} = -\frac{d^2P}{da_{r,3}da_{s,1}} \text{ u. s. w.}$$

so erhält man:

$$P = \begin{vmatrix} a_{r,1}a_{s,1} \\ a_{r,2}a_{s,2} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,2}} + \begin{vmatrix} a_{r,1}a_{s\,1} \\ a_{r,3}a_{s,3} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s,3}} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{r,n-1}a_{s,n-1} \\ a_{r,n} \quad a_{s,n} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,n-1}da_{s,n}}$$

oder auch:

$$(8.) \qquad P = \Sigma_u \Sigma_v \begin{vmatrix} a_{r,u}a_{s,u} \\ a_{r,v}a_{s,v} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,u}da_{s,v}} \, ,$$

wo u und v alle Werthe 1, 2, 3, ... n annehmen müssen.

Gänzlich analog hat man, wenn man die Gleichungen (7) mit $a_{s_1,1}, a_{s_1,2} \ldots a_{s_1,n}$ multiplicirt (während s_1, r als unter sich verschieden vorausgesetzt sind) und die Resultate addirt:

$$(9.) \qquad 0 = \Sigma_u \Sigma_v \begin{vmatrix} a_{s_1,u}a_{s,} \\ a_{s_1,v}a_{s,v} \end{vmatrix} \frac{d^2P}{da_{r,u}da_{s,v}} .$$

Wenn man in der Gleichung:

$$(10.) \quad \frac{dP}{da_{r,s}} = a_{s_1,1}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{s_1,1}} + a_{s_1,2}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{s_1,2}} + \ldots + a_{s_1,n}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{s_1,n}}$$

die in (6) angegebenen Permutationen der Indices ausführt, so erhält man:

$$(11.) \quad -\frac{dP}{da_{r,s}} = a_{s_1,1}\frac{d^2P}{da_{r,1}da_{s_1,s}} + a_{s_1,2}\frac{d^2P}{da_{r,2}da_{s_1,s}} + \ldots + a_{s_1,n}\frac{d^2P}{da_{r,n}da_{s_1,s}} .$$

Wir wollen auch noch die folgende Gleichung angeben, welche analog der Gleichung (4) und leicht zu beweisen ist:

$$(12.) \quad a_{s_1,1}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{r_1,1}} + a_{s_1,2}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{r_1,2}} + \ldots + a_{s_1,n}\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{r_1,n}} = 0,$$

wobei wieder r_1, s_1 verschieden unter einander sind.

Die Gleichung (8) zeigt, wie die Determinante P der $n$ten Ordnung aus der Summe von Produkten aus Determinanten der zweiten Ordnung in Determinanten der $(n-2)$ten Ordnung entstehen kann; in derselben Weise liesse sich zeigen, wie man die Determinante P erhalten kann aus der Summe von Produkten aus Determinanten der dritten, vierten, u. s. w. Ordnung in Determinanten der $(n-3)$ten, $(n-4)$ten, u. s. w. Ordnung; und man begreift leicht, wie man im Allgemeinen, vorausgesetzt, dass die Buchstaben $r_1, r_2 \ldots r_m$ ganze Zahlen von der Art bedeuten, dass:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$$

ist, während der Kürze wegen gesetzt ist:

$$P_{r_1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r_1} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,r_1} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{r_1,1} & a_{r_1,2} & \cdots & a_{r_1,r_1} \end{vmatrix}, \quad P_{r_2} = \begin{vmatrix} a_{r_1+1,r_1+1} & a_{r_1+1,r_1+2} & \cdots & a_{r_1+1,r_2} \\ a_{r_1+2\,r_1+1} & a_{r_1+2,r_1+2} & \cdots & a_{r_1+2,r_2} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{r_2,\,r_1+1} & a_{r_2,\,r_1+2} & \cdots & a_{r_2,\,r_2} \end{vmatrix}, \text{ u. s. w.}$$

haben wird:

$$(13.) \qquad P = \Sigma \pm P_{r_1} P_{r_2} \ldots P_{r_n},$$

wo das Zeichen Σ das Aggregat aller, dem hingeschriebenen analogen, Produkte bedeutet; — Produkte, aus Factoren, welche man erhält, indem man die Determinanten aus allen Gruppen von r_1 Colonnen in den r_1 ersten Reihen, ferner aus allen Gruppen von r_2 Colonnen in den r_2 nächsten Reihen u. s. f. bildet; so aber, dass weder eine Colonne, noch eine Reihe zweimal in demselben Produkt vorkommt. Die Anzahl dieser Produkte ist offenbar

$$\frac{1.2.3 \ldots n}{1.2.3 \ldots r_1 \,.\, 1.2.3 \ldots r_2 \ldots 1.2.3 \ldots r_m}.$$

Aus den Formeln (3) (4) erhält man leicht die folgende Gruppe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_{1,1}\frac{dP}{da_{1,s_1}} + a_{2,1}\frac{dP}{da_{2,s_1}} + \ldots + a_{n,1}\frac{dP}{da_{n,s_1}} &= 0, \\
a_{1,2}\frac{dP}{da_{1,s_1}} + a_{2,2}\frac{dP}{da_{2,s_1}} + \ldots + a_{n,2}\frac{dP}{da_{n,s_1}} &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots

Anwendung.

Wenn sechs Punkte in einer Ebene gegeben sind, den geometrischen Ort eines siebenten Punktes zu bestimmen, welcher die Eigenschaft hat, dass, wenn von ihm die sechs Geraden nach den gegebenen Punkten gezogen werden, das daraus entstehende Strahlenbüschel in Involution sei.

Seien x, y die Coordinaten des letztgenannten Punktes; x_1, $y_1 \ldots x_6$, y_6 diejenigen der andern Punkte. Denkt man sich die sechs Geraden durchschnitten von einer Geraden, welche wir als Axe der x annehmen, und bezeichnet man mit a_1, $a_2 \ldots a_6$ die Entfernungen der Durchschnittspunkte vom Anfangspunkt, so wird die Involution des Büschels dargestellt werden durch die Gleichung:

$$(15.) \qquad (a_1 - a_4)(a_3 - a_6)(a_5 - a_2) + (a_2 - a_3)(a_4 - a_5)(a_6 - a_1) = 0.$$

Nun aber hat man leicht:

$$a_1 = \frac{xy_1 - x_1 y}{y_1 - y}, \quad a_2 = \frac{xy_2 - x_2 y}{y_2 - y}, \quad \text{u. s. w.}$$

daher:

$$a_1 - a_4 = \frac{(xy_1 - x_1 y)(y_4 - y) - (xy_4 - x_4 y)(y_1 - y)}{(y_1 - y)(y_4 - y)}$$

ein Ausdruck, der sich durch die Formel (14) reducirt auf:

$$a_1 - a_4 = \frac{y}{(y_1 - y)(y_4 - y)} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (15), so hat man die folgende Gleichung des verlangten geometrischen Ortes:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_6 & y_6 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_5 & y_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_5 & y_5 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_6 & y_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung stellt offenbar eine Linie dritter Ordnung dar, und da diese Gleichung befriedigt wird, wenn man $x = x_1, x_2 \ldots y = y_1, y_2 \ldots$ setzt, so muss die Linie durch die sechs gegebenen Punkte gehen.

§. 4. Von der Auflösung der lineären algebraischen Gleichungen.

Die im §. 3 gefundenen Formeln sind von grossem Nutzen bei der Lösung der lineären algebraischen Gleichungen. Betrachtet man das System der Gleichungen:

$$(16.) \qquad \begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{1,n}\, x_n = u_1 \\ a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{2,n} x_n = u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\, x_1 + a_{n,2}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{n,n}\, x_n = u_n \end{cases}$$

so wird man den Werth irgend einer der Unbekannten $x_1, x_2 \ldots x_n$, z. B. den von x_s erhalten, indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dP}{da_{1,s}}, \frac{dP}{da_{2,s}} \ldots \frac{dP}{da_{n,s}}$ multiplicirt und die so entstandenen Gleichungen addirt. In der That, in dieser ganzen Summe werden die Coefficienten der Unbekannten, ausser dem von x_s, gleich Null sein, da diese Coefficienten Ausdrücke sind, welche mit dem ersten Gliede der linken Seite der Gleichung (4) analog sind; und der Coefficient von x_s wird, nach der linken Seite der Gleichung (3) gleich P sein; daher wird man haben:

$$Px_s = u_1 \alpha_{1,s} + u_2 \alpha_{2,s} + \ldots\ldots + u_n \alpha_{n,s}$$

wo $\alpha_{r,s}$ die Determinante (2) bezeichnet. In dieser Weise erhält man die Gruppe von Gleichungen:

$$(17.) \quad \left\{ \begin{array}{l} Px_1 = u_1 \alpha_{1,1} + u_2 \alpha_{2,1} + \ldots\ldots + u_n \alpha_{n,1} \\ Px_2 = u_1 \alpha_{1,2} + u_2 \alpha_{2,2} + \ldots\ldots + u_n \alpha_{n,2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Px_n = u_1 \alpha_{1,n} + u_2 \alpha_{2,n} + \ldots\ldots + u_n \alpha_{n,n} \end{array} \right.$$

welche die verlangten Werthe der Unbekannten geben. Es ist darauf aufmerksam zu machen, dass die Determinante P der gemeinsame Nenner für alle diese Werthe ist, eine Eigenschaft, welche zuerst von ***Cramer*** bemerkt wurde, und von der man sagen kann, dass sie der Ausgangspunkt für die Untersuchungen der Geometer in diesem Theile der Analysis gewesen sei.

Betrachtet man analog das System der Gleichungen:

$$(18.) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1} z_1 + a_{2,1} z_2 + \ldots\ldots + a_{n,1} z_n = v_1 \\ a_{1,2} z_1 + a_{2,2} z_2 + \ldots\ldots + a_{n,2} z_n = v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1,n} z_1 + a_{2,n} z_2 + \ldots\ldots + a_{n,n} z_n = v^n \end{array} \right.$$

(ein System, welches von einigen Schriftstellern das aus (16) ***derivirte System*** genannt wird), so wird man haben:

$$\begin{array}{l} Pz_1 = v_1 \alpha_{1,1} + v_2 \alpha_{1,2} + \ldots\ldots + v_n \alpha_{1,n} \\ Pz_2 = v_1 \alpha_{2,1} + v_2 \alpha_{2,2} + \ldots\ldots + v_n \alpha_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Pz_n = v_1 \alpha_{n,1} + v_2 \alpha_{n,2} + \ldots\ldots + v_n \alpha_{n,n} \end{array}$$

Es ist wichtig zu beachten, dass die Unbekannten der beiden Systeme (16) (18) verbunden sind durch eine Gleichung, welche man erhält, wenn man diese letzten Gleichungen nach der Reihe mit $u_1, u_2 \ldots u_n$ multiplicirt und die Resultate mit Berücksichtigung von (17) addirt; oder wenn man die Gleichungen (17) nach der Reihe mit $v_1, v_2 \ldots v_n$ multiplicirt und die Resultate unter Berücksichtigung der letzten Gleichungen addirt. Auf die eine oder andere Weise gelangt man zu:

$$(19.)\quad u_1 z_1 + u_2 z_2 + \dots + u_n z_n = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n$$

Die Gleichungeu (17) bestehen für jeden Werth von $u_1, u_2 \dots u_n$; sind daher diese Grössen alle gleich Null, während $x_1, x_2 \dots x_n$ nicht Null sein können, so wird

$$P = 0$$

sein müssen; wonach diese Gleichung das Resultat der Elimination der Unbekannten $x_1, x_2 \dots x_n$ aus der Gruppe der Gleichungen:

$$(20.)\quad \begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = 0 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,n} x_n = 0 \end{array}$$

ist; ebenso wie sie auch das Resultat der Elimination der Unbekannten $z_1, z_2 \dots z_n$ aus der Gruppe (18) ist, wenn $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$ angenommen wird.

Wenn man voraussetzt:

$$u_1 = -a_{1,0} x_0 \;,\; u_2 = -a_{2,0} x_0 \dots u_n = -a_{n,0} x_0$$

geben die Gleichungen (17) die Folgenden:

$$\begin{array}{l} P x_1 = -x_0 (a_{1,0} \alpha_{1,1} + a_{2,0} \alpha_{2,1} + \dots + a_{n,0} \alpha_{n,1}) \\ P x_2 = -x_0 (a_{1,0} \alpha_{1,2} + a_{2,0} \alpha_{2,2} + \dots + a_{n,0} \alpha_{n,2}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P x_n = -x_0 (a_{1,0} \alpha_{1,n} + a_{2,0} \alpha_{2,n} + \dots + a_{n,0} \alpha_{n,n}) \end{array}$$

aus denen:

$$(21.)\quad x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} : \pm \begin{vmatrix} a_{1,0} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,0} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} : \dots : \pm \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,0} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,0} \end{vmatrix}$$

Diese Proportionen geben die Werthe der Verhältnisse der $n+1$ Unbekannten in den n Gleichungen:

$$(22.)\quad \begin{array}{l} a_{1,0} x_0 + a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n = 0 \\ a_{2,0} x_0 + a_{2,1} x_1 + \dots + a_{2,n} x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,0} x_0 + a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,n} x_n = 0 \end{array}$$

Anwendungen.

1. Wenn man die Coordinaten irgend eines Punktes einer Ebene mit $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ bezeichnet, so ist die Gleichung eines in dieser Ebene liegenden Kegelschnittes:

$$\varphi = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2eyz + 2fxz + 2hxy = 0.$$

Damit die Gerade, welche durch die Gleichung:

$$lx + my + nz = 0$$

dargestellt wird, diesen Kegelschnitt berühre, müssen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax_1 + hy_1 + fz_1 - \tfrac{1}{2}l &= 0 \\ hx_1 + by_1 + ez_1 - \tfrac{1}{2}m &= 0 \\ fx_1 + ey_1 + cz_1 - \tfrac{1}{2}n &= 0 \\ lx_1 + my_1 + nz_1 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt werden, in denen x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Berührungspunktes sind. Also ist die Bedingung dafür, dass die Gerade den Kegelschnitt berühre:

$$(23.) \qquad \begin{vmatrix} a & h & f & l \\ h & b & e & m \\ f & e & c & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Denken wir uns eine zweite Gerade:

$$l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0,$$

so wird die Bedingung, dass dieselbe gleichfalls den Kegelschnitt berühre, sein:

$$(24.) \qquad \begin{vmatrix} a & h & f & l_1 \\ h & b & e & m_1 \\ f & e & c & n_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Um die Coordinaten der Berührungspunkte zu finden, bemerken wir, dass für:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & f & l & l_1 \\ h & b & e & m & m_1 \\ f & e & c & n & n_1 \\ l & m & n & 0 & 0 \\ l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und unter Berücksichtigung der Gleichungen (23), (24) die folgenden Gleichungen stattfinden werden:

$$\begin{aligned} l\frac{d\Delta}{dl_1} + m\frac{d\Delta}{dm_1} + n\frac{d\Delta}{dn_1} &= 0 \\ a\frac{d\Delta}{dl_1} + h\frac{d\Delta}{dm_1} + f\frac{d\Delta}{dn_1} + lH &= 0 \\ h\frac{d\Delta}{dl_1} + b\frac{d\Delta}{dm_1} + e\frac{d\Delta}{dn_1} + mH &= 0 \\ f\frac{d\Delta}{dl_1} + e\frac{d\Delta}{dm_1} + c\frac{d\Delta}{dn_1} + nH &= 0 \end{aligned}$$

in welchen die Ausdrücke $\frac{d\Delta}{dl_1}$, $\frac{d\Delta}{dm_1}$, $\frac{d\Delta}{dn_1}$ die Derivirten der Determinante Δ sind,

genommen nach den Elementen l_1, m_1, n_1, welche die letzte Reihe bilden, oder auch nach denjenigen Elementen, welche die letzte Colonne bilden, und:

$$H = \pm \begin{vmatrix} a & h & f & l \\ h & b & e & m \\ f & e & c & n \\ l_1 & m_1 & n_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Daher sind die Coordinaten des Berührungspunktes der ersten Geraden mit dem Kegelschnitte gegeben durch die Gleichungen:

$$x_1 : y_1 : z_1 = \frac{d\Delta}{dl_1} : \frac{d\Delta}{dm_1} : \frac{d\Delta}{dn_1}$$

und analog erhält man für die Coordinaten des Berührungspunktes der zweiten Geraden mit dem Kegelschnitte die Gleichungen:

$$x_2 : y_2 : z_2 = \frac{d\Delta}{dl} : \frac{d\Delta}{dm} : \frac{d\Delta}{dn}.$$

In Erwägung dass:

$$\frac{d\Delta}{dm}\frac{d\Delta}{dn_1} - \frac{d\Delta}{dm_1}\frac{d\Delta}{dn} = \Delta \frac{d^2\Delta}{dm\,dn_1}$$
$$\frac{d\Delta}{dn}\frac{d\Delta}{dl_1} - \frac{d\Delta}{dn_1}\frac{d\Delta}{dl} = \Delta \frac{d^2\Delta}{dn\,dl_1}$$
$$\frac{d\Delta}{dl}\frac{d\Delta}{dm_1} - \frac{d\Delta}{dl_1}\frac{d\Delta}{dm} = \Delta \frac{d^2\Delta}{dl\,dm_1}$$

wird die Gleichung der Berührungssehne:

$$\frac{d^2\Delta}{dm\,dn_1}x + \frac{d^2\Delta}{dn\,dl_1}y + \frac{d^2\Delta}{dl\,dm_1}z = 0,$$

oder auch, indem man mit x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Tangenten bezeichnet:

$$(25.) \quad (ax_0 + hy_0 + fz_0)x + (hx_0 + by_0 + ez_0)y + (fx_0 + ey_0 + cz_0)z = 0$$

oder endlich:

$$x_0\frac{d\varphi}{dx} + y_0\frac{d\varphi}{dy} + z_0\frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Die Gerade, welche durch die Gleichung dargestellt ist, heisst die *Polare* des Punktes (x_0, y_0, z_0), welcher *Pol* heisst.

Denkt man sich zwei andere Gerade, dargestellt durch die Gleichungen:

$$(26.) \qquad \begin{aligned} \lambda x + \mu y + \nu z &= 0 \\ \lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z &= 0 \end{aligned}$$

und setzt voraus, dass diese Geraden den Kegelschnitt berühren, so wird die Gleichung für die Polare des Durchschnittspunktes dieser Geraden sein:

$$\begin{vmatrix} a & h & f \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} h & b & e \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} f & e & c \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} z = 0.$$

Wenn man mit X, Y, Z die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Polaren bezeichnet; und mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden (26), und zur Abkürzung setzt:

$$\begin{aligned} bc - e^2 &= A \quad , \quad ac - f^2 = B \quad , \quad ab - h^2 = C \\ ef - hc &= H \quad , \quad he - bf = F \quad , \quad hf - ae = E \end{aligned}$$

so hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A(y_0z_1 - y_1z_0) + H(x_1z_0 - x_0z_1) + F(x_0y_1 - x_1y_0) &= kX \\ H(y_0z_1 - y_1z_0) + B(x_1z_0 - x_0z_1) + E(x_0y_1 - x_1y_0) &= kY \\ F(y_0z_1 - y_1z_0) + E(x_1z_0 - x_0z_1) + C(x_0y_1 - x_1y_0) &= kZ \end{aligned}$$

wo k eine unbestimmte Grösse ist. Aus diesen Gleichungen erhält man, für:

$$R = \begin{vmatrix} A & H & F \\ H & B & E \\ F & E & C \end{vmatrix}$$

die folgenden:

$$\begin{aligned} y_0z_1 - y_1z_0 &= \frac{k}{R}\{X(BC - E^2) + Y(EF - HC) + Z(HE - BF)\} \\ x_1z_0 - x_0z_1 &= \frac{k}{R}\{X(EF - HC) + Y(AC - F^2) + Z(HF - AE)\} \\ x_0y_1 - x_1y_0 &= \frac{k}{R}\{X(HE - BF) + Y(HF - AE) + Z(AB - H^2)\}. \end{aligned}$$

Man bemerke nun, dass wenn man mit S die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & e \\ f & e & c \end{vmatrix}$$

bezeichnet, man die Gleichung erhält:

$$\begin{aligned} BC - E^2 &= aS \quad , \quad AC - F^2 = bS \quad , \quad AB - H^2 = cS \\ EF - HC &= hS \quad , \quad HE - BF = fS \quad , \quad HF - AE = eS \end{aligned}$$

$$R = S^2 \text{ *)}$$

daher wird sein:

$$\begin{aligned} y_0z_1 - y_1z_0 &= \frac{k}{S}(aX + hY + fZ) \\ z_0x_1 - z_1x_0 &= \frac{k}{S}(hX + bY + eZ) \\ x_0y_1 - x_1y_0 &= \frac{k}{S}(fX + eY + cZ). \end{aligned}$$

*) Diese Relationen werden allgemein im §. 6. bewiesen werden.

Nun ist aber die Gleichung der Geraden, welche durch die beiden Pole, d. h. durch die Punkte x_0, y_0, z_0 ; x_1, y_1, z_1 geht:

$$(y_0z_1 - y_1z_0)x + (z_0x_1 - z_1x_0)y + (x_0y_1 - x_1y_0)z = 0$$

daher wird, durch Substitution der gefundenen Werthe, die Gleichung dieser Geraden:

$$(aX + hY + fZ)x + (hX + bY + eZ)y + (fX + eY + cZ)z = 0.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Gerade heisst die Polare des Punktes X, Y, Z; und die beiden Systeme, von welchen das eine aus dem Punkte x_0, y_0, z_0 und der letztgenannten Geraden zusammen gesetzt ist, auf welcher er liegt; und das andere aus dem Punkte X, Y, Z und der Geraden (25), auf welcher der letztgenannte Punkt liegt, heissen *reciproke Polaren.*

2. *Discriminante* einer homogenen Function zweier Variabeln heisst die linke Seite derjenigen Gleichung, welche aus der Elimination der Variabeln aus den Gleichungen entsteht, welche ausdrücken, dass die ersten partiellen Differentialquotienten der homogenen Function verschwinden. Sei:

$$ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

die homogene Function, von der man die Discriminante sucht. Setzt man ihre ersten partiellen Differentialquotienten nach x und y gleich Null, so erhält man:

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$$
$$bx^3 + 3cx^2y + 3dxy^2 + ey^3 = 0.$$

Um die Variabeln x, y aus diesen Gleichungen zu eliminiren, wollen wir von einer Methode Gebrauch machen, die wir Herrn *Sylvester* verdanken, und welche von demselben „*dialytische*" Methode benannt worden ist*). Wenn man die sechs Gleichungen betrachtet, welche man durch Multiplication jeder der obigen mit x^2, xy, y^2 erhält, so ist es klar, dass wenn man die sechs Grössen $x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5$ als die zu eliminirenden Unbekannten ansieht, man sechs Gleichungen, die analog den Gleichungen (20) sind, bekommt; und daher erhält man das Resultat der Elimination, indem man die Determinante der Coefficienten gleich Null setzt. Um diese Erklärung deutlich zu machen, schreiben wir diese sechs Gleichungen in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned}
ax^5 + 3bx^4y + 3cx^3y^2 + dx^2y^3 + . + . &= 0\\
. + ax^4y + 3bx^3y^2 + 3cx^2y^3 + dxy^4 + . &= 0\\
. + . + ax^3y^2 + 3bx^2y^3 + 3cxy^4 + dy^5 &= 0\\
bx^5 + 3cx^4y + 3dx^3y^2 + ex^2y^3 + . + . &= 0\\
. + bx^4y + 3cx^3y^2 + 3dx^2y^3 + exy^4 + . &= 0\\
. + . + bx^3y^2 + 3cx^2y^3 + 3dxy^4 + ey^5 &= 0
\end{aligned}$$

und es wird das Resultat der Elimination sein:

*) Philosophical Magazine. June 1841.

$$\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & 0 & 0 \\ 0 & b & 3c & 3d & e & 0 \\ 0 & 0 & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Discriminante der homogenen Function vierten Grades zweier Variabeln. Der algebraische Werth dieser Discriminante ist von den Herren *Boole* und *Cayley* unter die einfache Form gebracht:

$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace - ad^2 - eb^2 - c^3 + 2bdc)^2$$

Aus dem Obigen folgt, dass im Allgemeinen die Discriminante einer homogenen Function zweier Variabeln vom Grade n eine homogene Function der Coefficienten vom Grade $2(n-1)$ sei.

3. Es möge u eine homogene Function r^{ten} Grades der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ vorstellen, und zur Abkürzung setze man:

$$u_r = \frac{du}{dx_r}, \quad u_{r,s} = \frac{d^2u}{dx_r\,dx_s},$$

so wird man nach dem bekannten Satz von *Euler* die Gleichungen haben:

$$\begin{aligned} x_1 u_{1,1} + x_2 u_{1\,2} + \ldots\ldots + x_n u_{1,n} - (r-1)u_1 &= 0 \\ x_1 u_{2,1} + x_2 u_{2,2} + \ldots\ldots + x_n u_{2,n} - (r-1)u_2 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 u_{n,1} + x_2 u_{n,2} + \ldots\ldots + x_n u_{n,n} - (r-1)u_n &= 0 \\ x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots\ldots + x_n u_n - ru &= 0. \end{aligned}$$

Die Elimination der Grössen x_1, x_2, ... x_n aus diesen $(n+1)$ Gleichungen liefert:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} u_{1,2} \ldots\ldots u_{1,n} u \\ u_{2,1} u_{2,2} \ldots\ldots u_{2,n} u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n,1} u_{n,2} \ldots\ldots u_{n,n} u_n \\ u_1 \quad u_2 \quad \ldots\ldots u_n \frac{r}{r-1} u \end{vmatrix} = 0,$$

und daher:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} u_{1,2} \ldots\ldots u_{1,n} u_1 \\ u_{2,1} u_{2,2} \ldots\ldots u_{2,n} u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n,1} u_{n,2} \ldots\ldots u_{n,n} u_n \\ u_1 \quad u_2 \quad \ldots\ldots u_n \quad 0 \end{vmatrix} \pm \frac{r}{r-1} u \begin{vmatrix} u_{1,1} u_{1,2} \ldots\ldots u_{1,n} \\ u_{2,1} u_{2,2} \ldots\ldots u_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n,1} u_{n,2} \ldots\ldots u_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus folgt, dass für diejenigen Werthe der Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$, für welche der Werth der Function u Null ist, die Determinante:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n} & u_1 \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n} & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \ldots & u_{n,n} & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Wenn man $n = 2$ setzt, so wird für diejenigen Werthe von x_1, x_2, welche der Gleichung $u(x_1, x_2) = 0$ genügen, das Trinom:

$$u_{1,1} u^2_2 - 2 u_{1,2} u_1 u_2 + u_{2,2} u_1^2$$

verschwinden; oder geometrisch: wenn man annähme, dass diese Gleichung eine Curve darstellte, so würde der Krümmungsradius in jedem ihrer Punkte unendlich sein, daher würde die Gleichung $u(x_1, x_2) = 0$ ein Paar Gerade darstellen.

Ebenso stellt die Gleichung $u(x_1, x_2, x_3) = 0$ einen Kegel dar.

§. 5. Multiplication der Determinanten und deren Erhebung auf Potenzen.

Betrachten wir zwei Systeme von Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \ldots + a_{1,n} x_n &= u_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \ldots + a_{2,n} x_n &= u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\

aus der Gleichsetzung der Nenner dieser Werthe entsteht, liefert das Gesetz für die Multiplication der Determinanten.

Nimmt man im ersten System anstatt der Grössen $x_1, x_2 \ldots x_n$ die aus dem zweiten gegebenen Werthe, und setzt zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
&a_{1,1}\,c_{1,1} + a_{1,2}\,c_{1,2} + \ldots + a_{1,n}\,c_{1,n} = h_{1,1}\\
&a_{1,1}\,c_{2,1} + a_{1,2}\,c_{2,2} + \ldots + a_{1,n}\,c_{2,n} = h_{1,2}\\
&\ldots\ldots\\
&a_{1,1}\,c_{n,1} + a_{1,2}\,c_{n,2} + \ldots + a_{1,n}\,c_{n,n} = h_{1,n}\\
&\\
&a_{2,1}\,c_{1,1} + a_{2,2}\,c_{1,2} + \ldots + a_{2,n}\,c_{1,n} = h_{2,1}\\
&a_{2,1}\,c_{2,1} + a_{2,2}\,c_{2,2} + \ldots + a_{2,n}\,c_{2,n} = h_{2,2}\\
&\ldots\ldots\\
(27.)\quad &a_{2,1}\,c_{n,1} + a_{2,2}\,c_{n,2} + \ldots + a_{2,n}\,c_{n,n} = h_{2,n}\\
&\ldots\ldots\\
&a_{n,1}\,c_{1,1} + a_{n,2}\,c_{1,2} + \ldots + a_{n,n}\,c_{1,n} = h_{n,1}\\
&a_{n,1}\,c_{2,1} + a_{n,2}\,c_{2,2} + \ldots + a_{n,n}\,c_{2,n} = h_{n,2}\\
&\ldots\ldots\\
&a_{n,1}\,c_{n,1} + a_{n,2}\,c_{n,2} + \ldots + a_{n,n}\,c_{n,n} = h_{n,n}
\end{aligned}$$

so erhält man die Gruppe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&h_{1,1}\,y_1 + h_{1,2}\,y_2 + \ldots + h_{1,n}\,y_n = u_1\\
&h_{2,1}\,y_1 + h_{2,2}\,y_2 + \ldots + h_{2,n}\,y_n = u_2\\
&\ldots\ldots\\
&h_{n,1}\,y_1 + h_{n,2}\,y_2 + \ldots + h_{n,n}\,y_n = u_n
\end{aligned}$$

und wenn man aus diesen die Werthe von $y_1, y_2 \ldots y_n$ bestimmt, so werden diese Werthe zum gemeinsamen Nenner die Determinante:

$$(28.)\quad R = \pm \begin{vmatrix} h_{1,1}\,h_{1,2} + \ldots + h_{1,n}\\ h_{2,1}\,h_{2,2} + \ldots + h_{2,n}\\ \ldots\ldots\\ h_{n,1}\,h_{n,2} + \ldots + h_{n,n} \end{vmatrix}$$

haben.

Wenn man dagegen aus dem ersten System die Werthe $x_1, x_2 \ldots x_n$ bestimmt, so wird ihr gemeinsamer Nenner sein:

$$P = \pm \begin{vmatrix} a_{1,1}\,a_{1,2} \ldots a_{1,n}\\ a_{2,1}\,a_{2,2} \ldots a_{2,n}\\ \ldots\ldots\\ a_{n,1}\,a_{n,2} \ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

daher wird, wenn man diese Werthe in das zweite System substituirt, und aus den resultirenden Gleichungen die Werthe von y_1, y_2 .... y_n bestimmt, der gemeinsame Nenner dieser letzten Werthe aus dem Produkte der obigen Determinante in die Determinante:

$$(29.) \qquad Q = \pm \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{vmatrix}$$

bestehen, und folglich wird man durch die Vergleichung dieser Werthe:

$$(30.) \qquad R = P.Q$$

erhalten, was die verlangte Formel für das Produkt der Determinanten ist. Aus der Betrachtung der Gleichungen (27) ist klar, wie die Elemente, welche ein und dieselbe Reihe der Determinante R bilden, entstehen aus der Summe der Produkte der Elemente einer Reihe der Determinante P in die Elemente der verschiedenen Reihen des Factors Q. Es ist offenbar, dass die Determinante R auch erhalten werden kann, indem man die Multiplicationen der Elemente der Factoren Colonnenweis oder Reihen- und Colonnenweis ausführt. In diesen Fällen wird die Form des Produktes nicht mehr diejenige der Determinante R sein; aber die algebraischen Werthe dieser Determinanten werden identisch sein.

Daher kann man zum Beispiel das Produkt der Determinanten zweiter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

in den folgenden vier verschiedenen Weisen ausdrücken:

$$\begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & a\gamma + b\delta \\ c\alpha + d\beta & c\gamma + d\delta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a\alpha + c\gamma & a\beta + c\delta \\ b\alpha + d\gamma & b\beta + d\delta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a\alpha + c\beta & a\gamma + c\delta \\ b\alpha + d\beta & b\gamma + d\delta \end{vmatrix}$$

Wenn die Elemente der Determinante P identisch mit den Elementen der Determinante Q sind, so wird die Gleichung (30)

$$R = P^2$$

geben, und die Elemente der Determinante R werden durch die Gleichungen:

$$a^2_{r,1} + a^2_{r,2} + \ldots + a^2_{r,n} = h_{r,r}$$

$$a_{r,1}\, a_{s,1} + a_{r,2}\, a_{s,2} + \ldots + a_{r,n}\, a_{s,n} = h_{r,s}$$

gegeben, in welchen die Grössen r, s die Werthe von 1, 2 ..... n annehmen können.

Es ist wichtig, zu bemerken, dass in der Determinante, welche das Quadrat irgend einer Determinante ist, die conjugirten Elemente untereinander identisch sind.

Anwendungen.

1. Die Gleichung dritten Grades, auf welche man in der Geometrie kommt, wenn man die Hauptachsen einer Fläche zweiten Grades bestimmen will, und in der

Mechanik bei der Aufsuchung der Hauptträgheitsachsen eines Körpers oder der Hauptelasticitätsachsen oder der Achsen des Elasticitäts-Ellipsoids u. s. w. kann unter der Form einer Determinante in folgender Weise geschrieben werden:

$$f(-\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & \gamma & \beta \\ \gamma & b-\lambda & \alpha \\ \beta & \alpha & c-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind reell. Dieser schon von *Cauchy*, *Kummer*, *Borchardt*, *Jacobi* bewiesene Satz ist neuerdings von Herrn *Sylvester* *) mit grosser Einfachheit und Eleganz unter Benutzung der Regel für die Multiplication der Determinanten bewiesen worden.

Multiplicirt man die linke Seite der obigen Gleichung durch die Determinante $f(\lambda)$, so hat man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A-\lambda^2 & F & E \\ F & B-\lambda^2 & D \\ E & D & C-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{aligned} a^2+\beta^2+\gamma^2 &= A & \qquad \alpha\beta+\gamma(a+b) &= F \\ b^2+\alpha^2+\gamma^2 &= B & \qquad \alpha\gamma+\beta(a+c) &= E \\ c^2+\alpha^2+\beta^2 &= C & \qquad \beta\gamma+\alpha(b+c) &= D \end{aligned}$$

daher haben wir:

$$-f(\lambda).f(-\lambda) = \lambda^6 - L\lambda^4 + M\lambda^2 - N.$$

Wir wollen bemerken, dass die Coefficienten L, M, N positiv sind, da man ja leicht erhält:

$$L = a^2+b^2+c^2+2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2$$

$$M = (ab-\gamma^2)^2+(ac-\beta^2)^2+(bc-\alpha^2)^2+2(a\alpha-\beta\gamma)^2+2(b\beta-\alpha\gamma)^2+2(c\gamma-\alpha\beta)^2$$

$$N = \begin{vmatrix} a & \gamma & \beta \\ \gamma & b & \alpha \\ \beta & \alpha & c \end{vmatrix}^2.$$

Man setze:

$$a = a_1+p \quad , \quad b = b_1+p \quad , \quad c = c_1+p \quad , \quad \lambda = \lambda_1+p$$

so wird der Ausdruck $f(-\lambda)$:

$$\varphi(-\lambda_1) = \begin{vmatrix} a_1-\lambda_1 & \gamma & \beta \\ \gamma & b_1-\lambda_1 & \alpha \\ \beta & \alpha & c_1-\lambda_1 \end{vmatrix}$$

und die Gleichung $\varphi(-\lambda_1).\varphi(\lambda_1) = 0$ wird von der Form sein:

$$\lambda_1^6 - L_1\lambda_1^4 + M_1\lambda_1^2 - N_1 = 0$$

in welcher die Coefficienten L_1, M_1, N_1 positiv sind. Da nun nach der Cartesischen

*) Philosophical Magazine. 1852.

Regel keiner derWerthe von λ_1^2 negativ sein kann, also $(\lambda - p)^2$ nicht gleich $-q^2$, so kann auch nicht $\lambda = p + q\sqrt{-1}$ sein. Daraus folgt, dass die Wurzeln der Gleichung $f(-\lambda) = 0$ wesentlich reell sind.

Wir wollen bemerken, dass dieser Beweis, ebenso wie die von ***Jacobi*** und ***Borchardt***, auch für die Gleichungen n^{ten} Grades von derselben Form gilt, was wir im Folgenden sehen werden.

2. Seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Cosinus der Winkel, welche drei von demselben Punkte ausgehende Gerade mit drei rechtwinkligen Achsen bilden, und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Winkel, welche diese Geraden miteinander einschliessen. Man hat dann die bekannten Relationen:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 & \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= \cos\omega_3 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 & \qquad \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 &= \cos\omega_2 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 & \qquad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= \cos\omega_1 \end{aligned}$$

also:

$$(31.) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_3 & \cos\omega_2 \\ \cos\omega_3 & 1 & \cos\omega_1 \\ \cos\omega_2 & \cos\omega_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nun aber ist bekannt, dass wenn man mit a, b, c die Cosinus der Winkel bezeichnet, welche das Loth auf der durch zwei Gerade bestimmten Ebene z. B. der zweiten und dritten, mit den rechtwinkligen Achsen bildet, die Gleichungen stattfinden:

$$a = \pm\frac{\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2}{\sin\omega_1}, \qquad b = \pm\frac{\alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3}{\sin\omega_1}, \qquad c = \pm\frac{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}{\sin\omega_1}$$

und dass:

$$a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = \sin\omega_2 \,.\, \sin\theta_3 = \sin\omega_3 \,.\, \sin\theta_2$$

wo $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ die Neigungswinkel zwischen den Ebenen bedeuten, deren gemeinsame Durchschnitte die erste, zweite und dritte Gerade sind. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (31), so hat man:

$$\sin\omega_1 \,.\, \sin\omega_2 \,.\, \sin\theta_3 = \sin\omega_1 \,.\, \sin\omega_3 \,.\, \sin\theta_2 = \pm\sqrt{(1 - \cos^2\omega_1 - \cos^2\omega_2 - \cos^2\omega_3 + 2\cos\omega_1\cos\omega_2\cos\omega_3)}.$$

3. Mittelst der Multiplication der Determinanten kann man einige Transformationen von Determinanten erhalten, welche in vielen Untersuchungen nützlich sind. Wir werden zwei Beispiele von ähnlichen Transformationen geben.

Wenn die Determinante P multiplicirt wird durch die Determinante:

$$S = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{2,1} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \alpha_2 & -a_{1,1} & a_{3,1} & \ldots\ldots & 0 \\ \alpha_3 & 0 & -a_{2,1} & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_n & 0 & 0 & \ldots\ldots & -a_{n-1,1} \end{vmatrix}$$

und man annimmt, dass die unbestimmten Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ den n Gleichungen:

$$\alpha_1 a_{1,1} + \alpha_2 a_{2,1} + \ldots\ldots + \alpha_n a_{n,1} = 1$$
$$\alpha_1 a_{1,2} + \alpha_2 a_{2,2} + \ldots\ldots + \alpha_n a_{n,2} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_1 a_{1,n} + \alpha_2 a_{2,n} + \ldots\ldots + \alpha^n a_{n,n} = 0$$

genügen, so wird die dem Produkt gleiche Determinante sein:

$$I = \begin{vmatrix} a_{1,2}\,a_{2,1} - a_{1,1}\,a_{2,2} & a_{1,3}\,a_{2,1} - a_{1,1}\,a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{1,n}\,a_{2,1} - a_{1,1}\,a_{2,n} \\ a_{2,2}\,a_{3,1} - a_{2,1}\,a_{3,2} & a_{2,3}\,a_{3,1} - a_{2,1}\,a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{2,n}\,a_{3,1} - a_{2,1}\,a_{3,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n-1,2}\,a_{n,1} - a_{n-1,1}\,a_{n,2} & a_{n-1,3}\,a_{n,1} - a_{n-1,1}\,a_{n,3} & \ldots\ldots & a_{n-1,n}\,a_{n,1} - a_{n-1,1}\,a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Bemerkt man nun, dass:

$$S = (-1)^{n-1}\, a_{2,1}\, a_{3,1} \ldots\ldots\, a_{n-1,1}$$

ist, so wird man haben:

$$I = (-1)^{n-1}\, a_{2,1}\, .\, a_{3,1} \ldots\ldots\, a_{n-1,1} P.$$

Die Nützlichkeit dieser Formel ist bereits von Herrn *Hermite* *) in einer Zahlentheoretischen Untersuchung bewiesen.

Als einen besondern Fall derselben hat man die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1 - x_2}{a} & \frac{y_1 - y_2}{b} \\ \frac{x_2 - x_3}{a} & \frac{y_2 - y_3}{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} \\ 1 & \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \\ 1 & \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} \end{vmatrix}$$

deren rechte Seite, vorausgesetzt, dass x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; x_3, y_3 Coordinaten von Punkten darstellen, welche auf einer Ellipse mit den Halbachsen a und b liegen, gleich $\pm \frac{2A}{ab}$ ist, wo A den Flächeninhalt des Dreiecks bedeutet, dessen Ecken in diesen drei Punkten liegen.

Wenn man aber mit λ, μ, ν die Länge der Seiten des Dreiecks bezeichnet und mit l, m, n die diesen Seiten bezüglich parallelen Halbmesser der Ellipse, so erhält man durch Quadriren der obigen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda^2}{l^2}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{\lambda^2}{l^2} - \frac{\nu^2}{n^2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{\lambda^2}{l^2} - \frac{\nu^2}{n^2}\right), & \frac{\nu^2}{n^2} \end{vmatrix} = \frac{4A^2}{a^2 b^2}$$

und daher:

$$A = \frac{ab}{4} V\left\{\left(\frac{\lambda}{l} + \frac{\mu}{m} + \frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{l} - \frac{\mu}{m} + \frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{l} + \frac{\mu}{m} - \frac{\nu}{n}\right)\left(-\frac{\lambda}{l} + \frac{\mu}{m} + \frac{\nu}{n}\right)\right\}$$

*) Journal de Liouville. T. 14.

Als zweites Beispiel einer Transformation der Determinanten wollen wir ein von Herrn *Sylvester* *) aufgestelltes Theorem beweisen, von welchem derselbe Schriftsteller verschiedene geometrische Anwendungen gemacht hat.

Theorem. Der Werth der Determinante:

$$(32.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

ist gleich dem der Determinante:

$$H = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} & 1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

in welcher:

$$A_{r,s} = a_{r,s} + h_r + k_s$$

wo h_1, h_2 .....; k_1, k_2 ..... zwei Reihen gänzlich willkürlicher Grössen sind.

In der That, multiplicirt man die Determinante (32) durch die folgende:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & k_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & k_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 1$$

und führt die Multiplication nach Reihen aus, so hat man:

$$\pm\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1}+k_1 & a_{1,2}+k_2 & \ldots & 1 \\ a_{2,1}+k_1 & a_{2,2}+k_2 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}+k_1 & a_{n,2}+k_2 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn man dies Resultat durch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ h_1 & h_2 & \ldots & h_n & 1 \end{vmatrix} = \pm 1$$

*) Philosophical Magazine. 1852.

multiplicirt und die Multiplication nach Colonnen ausführt, so kommt:

$$\Delta = H$$

was zu beweisen war.

Die Gleichung:

$$PQ = R$$

liefert durch Differentiation nach $a_{r,1}$, $a_{r,2}$ ..... $a_{r,n}$

mit Rücksicht auf (27) die folgenden:

$$Q\frac{dP}{da_{r,1}} = \frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,1} + \frac{dR}{dh_{r,2}}c_{2,1} + \ldots\ldots + \frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,1}$$

$$Q\frac{dP}{da_{r,2}} = \frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,2} + \frac{dR}{dh_{r,2}}c_{2,2} + \ldots\ldots + \frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q\frac{dP}{da_{r,n}} = \frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,n} + \frac{dR}{dh_{r,2}}c_{2,n} + \ldots\ldots + \frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,n}$$

Wenn man diese Gleichungen mit $\frac{dQ}{dc_{s,1}}$, $\frac{dQ}{dc_{s,2}}$, ... $\frac{dQ}{dc_{s,n}}$ multiplicirt und dann addirt, so kommt:

$$(33.)\quad \frac{dP}{da_{r,1}}\frac{dQ}{dc_{s,1}} + \frac{dP}{da_{r,2}}\frac{dQ}{dc_{s,2}} + \ldots\ldots + \frac{dP}{da_{r,n}}\frac{dQ}{dc_{s,n}} = \frac{dR}{dh_{r,s}}$$

weil nemlich der Ausdruck:

$$c_{r,1}\frac{dQ}{dc_{s,1}} + c_{r,2}\frac{dQ}{dc_{s,2}} + \ldots\ldots + c_{r,n}\frac{dQ}{dc_{s,n}},$$

nachdem, was §. 3 bewiesen ist, gleich 0 oder gleich Q ist, je nachdem die Indices r und s verschiedene oder gleiche Werthe haben.

Wenn die Elemente der Determinante P mit denen der Determinante Q identisch sind, so liefert die Formel (33):

$$(34.)\quad \frac{dP}{da_{r,1}}\frac{dP}{da_{s,1}} + \frac{dP}{da_{r,2}}\frac{dP}{da_{s,2}} + \ldots\ldots + \frac{dP}{da_{r,n}}\frac{dP}{da_{s,n}} = \frac{dR}{dh_{r,s}}$$

und daher für $r = s$:

$$(35.)\quad \left(\frac{dP}{da_{r,1}}\right)^2 + \left(\frac{dP}{da_{r,2}}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{dP}{da_{r,n}}\right)^2 = \frac{dR}{dh_{r,r}}.$$

Beispiel:

$$(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)^2+(\gamma_2\alpha_1-\gamma_1\alpha_2)^2+(\beta_2\gamma_1-\beta_1\gamma_2)^2 = (\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)^2$$

Es ist klar, dass man durch Differentiation andere Relationen zwischen den Determinanten P, Q und R erhalten kann. Unter diesen wollen wir die beiden folgenden bemerken. Differentiirt man die Gleichung:

$$(36.)\quad Q\frac{dP}{da_{r,s}} = \frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,s} + \frac{dR}{dh_{r,2}}c_{2,s} + \ldots\ldots + \frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,s}$$

nach c_{r_1,s_1}; und die Gleichung:

$$Q\frac{dP}{da_{r,s_1}} = \frac{dR}{dh_{r,1}}c_{1,s_1} + \frac{dR}{dh_{r,2}}c_{2,s_1} + \ldots\ldots + \frac{dR}{dh_{r,n}}c_{n,s_1}$$

nach $c_{r_1,s}$ und subtrahirt die Resultate, so erhält man:

$$(37.)\qquad \frac{dP}{da_{r,s}}\frac{dQ}{dc_{r_1,s_1}} - \frac{dP}{da_{r,s_1}}\frac{dQ}{dc_{r_1,s}} = \Sigma_u\Sigma_v\begin{vmatrix} a_{u,s_1} & a_{u,s} \\ c_{v,s_1} & c_{v,s}\end{vmatrix}\frac{d^2R}{dh_{r,v}dh_{u,r_1}}$$

wo u und v alle Werthe 1, 2 ... n annehmen müssen.

Differentiirt man (36) nach a_{r_1,s_1} und berücksichtigt die Gleichungen (5) und (6), so kommt:

$$(38.)\qquad Q\frac{d^2P}{da_{r,s}da_{r_1,s_1}} = \Sigma_u\Sigma_v\begin{vmatrix} c_{u,s_1} & c_{u,s} \\ c_{v,s_1} & c_{v,s}\end{vmatrix}\frac{d^2R}{dh_{r,v}\,dh_{r_1,u}}.$$

Setzen wir voraus, dass die Elemente der Determinante P identisch sind mit denen der Determinante Q, so hat man $h_{u,r_1} = h_{r_1,u}$, und daher durch Vergleichung der beiden Gleichungen (37) und (38) die Gleichung (14), welche im §. 3. gefunden wurde.

Betrachten wir die folgenden beiden Systeme von Gleichungen:

$$c_{1,1}\frac{dP}{da_{r,1}} + c_{1,2}\frac{dP}{da_{r,2}} + \ldots\ldots + c_{1,n}\frac{dP}{da_{r,n}} = H_{r,1}$$
$$c_{2,1}\frac{dP}{da_{r,1}} + c_{2,2}\frac{dP}{da_{r,2}} + \ldots\ldots + c_{2,n}\frac{dP}{da_{r,n}} = H_{r,2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{n,1}\frac{dP}{da_{r,1}} + c_{n,2}\frac{dP}{da_{r,2}} + \ldots\ldots + c_{n,n}\frac{dP}{da_{r,n}} = H_{r,n}$$

$$a_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,1}} + a_{r,2}\frac{dQ}{dc_{1,2}} + \ldots\ldots + a_{r,n}\frac{dQ}{dc_{1,n}} = K_{r,1}$$
$$a_{r,1}\frac{dQ}{dc_{2,1}} + a_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,2}} + \ldots\ldots + a_{r,n}\frac{dQ}{dc_{2,n}} = K_{r,2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{r,1}\frac{dQ}{dc_{n,1}} + a_{r,2}\frac{dQ}{dc_{n,2}} + \ldots\ldots + a_{r,n}\frac{dQ}{dc_{n,n}} = K_{r,n}$$

und multipliciren die Gleichungen des ersten Systems mit $\frac{dQ}{dc_{1,1}}, \frac{dQ}{dc_{2,1}} \ldots\ldots \frac{dQ}{dc_{n,1}}$ und addiren die Resultate, so kommt:

$$Q\frac{dP}{da_{r,1}} = H_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,1}} + H_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,1}} + \ldots\ldots + H_{r,n}\frac{dQ}{dc_{n,1}}$$

und analog:

$$Q\frac{dP}{da_{r,2}} = H_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,2}} + H_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,2}} + \ldots + H_{r,n}\frac{dQ}{dc_{n,2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q\frac{dP}{da_{r,n}} = H_{r,1}\frac{dQ}{dc_{1,n}} + H_{r,2}\frac{dQ}{dc_{2,n}} + \ldots + H_{n,n}\frac{dQ}{dc_{n,n}} .$$

Diese letzten Gleichungen liefern, multiplicirt mit $a_{r,1}$, $a_{r,2} \ldots a_{r,n}$, und addirt, mit Rücksicht auf das zweite System:

$$(39.) \qquad PQ = H_{r,1}K_{r,1} + H_{r,2}K_{r,2} + \ldots + H_{r,n}K_{r,n}$$

und multiplicirt mit $a_{s,1}$, $a_{s,2} \ldots a_{s,n}$ und addirt:

$$0 = H_{r,1}K_{s,1} + H_{r,2}K_{s,2} + \ldots + H_{r,n}K_{s,n} .$$

Die Grössen $H_{r,1}$, $H_{r,2} \ldots K_{s,1}$, $K_{s,2}$ sind offenbar Determinanten n^{ter} Ordnung.

Anwendungen.

1. Man stelle sich ein Tetraeder vor, welches auf drei rechtwinklige Achsen bezogen ist, deren Ursprung in dem Schwerpunkt einer der Seitenflächen liegt. Es seien a, b, c die Flächenräume der andern drei Seiten; α_1, β_1, γ_1 ; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 die Cosinus der Winkel, welche die Lothe vom Ursprung auf diese drei Flächen mit den positiven Coordinatenachsen einschliessen; x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; x_3, y_3, z_3 die Coordinaten der Schwerpunkte dieser Seiten; und v das Volumen des Tetraeders.

Nach einem bekannten, von Herrn *Cauchy* herrührenden, Theorem hat man die neun Gleichungen:

$$(40.)\quad \begin{array}{lll} a\alpha_1x_1 + b\alpha_2x_2 + c\alpha_3x_3 = v\ , & a\alpha_1y_1 + b\alpha_2y_2 + c\alpha_3y_3 = 0\ , & a\alpha_1z_1 + b\alpha_2z_2 + c\alpha_3z_3 = 0 \\ a\beta_1x_1 + b\beta_2x_2 + c\beta_3x_3 = 0\ , & a\beta_1y_1 + b\beta_2y_2 + c\beta_3y_3 = v\ , & a\beta_1z_1 + b\beta_2z_2 + c\beta_3z_3 = 0 \\ a\gamma_1x_1 + b\gamma_2x_2 + c\gamma_3x_3 = 0\ , & a\gamma_1y_1 + b\gamma_2y_2 + c\gamma_3y_3 = 0\ , & a\gamma_1z_1 + b\gamma_2z_2 + c\gamma_3z_3 = v. \end{array}$$

Setzt man:

$$P = \begin{vmatrix} a\alpha_1 & b\alpha_2 & c\alpha_3 \\ a\beta_1 & b\beta_2 & c\beta_3 \\ a\gamma_1 & b\gamma_2 & c\gamma_3 \end{vmatrix} = a\,b\,c \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

so hat man:

$$PQ = v^3.$$

Nun ist aber nach einer bekannten Formel:

$$P = \frac{9}{2}v^2$$

und wenn man mit u das Volumen desjenigen Tetraeders bezeichnet, dessen Ecken in den Schwerpunkten der Seiten des ursprünglichen Tetraeders liegen, so ist:

$$Q = 6u$$

mithin ist:

$$v = 27u$$

Aus den Gleichungen (39) folgt:

$$ax_1 = \frac{dR}{d\alpha_1}\frac{v}{R}\ ,\quad ay_1 = \frac{dR}{d\beta_1}\frac{v}{R}\ ,\quad az_1 = \frac{dR}{dy_1}\frac{v}{R}\ \text{u. s. w.}$$

wo $R = \frac{P}{abc}$; und folglich:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{v^2}{a^2R^2}\left\{\left(\frac{dR}{d\alpha_1}\right) + \left(\frac{dR}{d\beta_1}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\gamma_1}\right)^2\right\}$$

und folglich:

$$l = \frac{2}{9}\frac{bc}{v}\sin\omega$$

wenn l die Länge einer Kante des zweiten Tetraeders bezeichnet und ω den Neigungswinkel der Flächen b und c. Bezeichnet man aber mit λ die Länge derjenigen Kante, welche dem gemeinsamen Durchschnitt jener beiden Flächen gegenüber liegt, so ist:

$$v = \frac{2}{3}\frac{bc}{\lambda}\sin\omega$$

und also:

$$l = \frac{1}{3}\lambda.$$

2. Setzt man:

$$P = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

so ist:

$$PQ = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$O = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

Wenn $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$ die Coordinaten eines Punktes A bedeuten, $\frac{x_2}{z_2}$, $\frac{y_2}{z_2}$; $\frac{x_3}{z_3}$, $\frac{y_3}{z_3}$ die zweier Punkte B und C, und ebenso $\frac{a_1}{c_1}$, $\frac{b_1}{c_1}$ . . . die Coordinaten anderer dreier Punkte a, b, c so entsprechen die obigen Gleichungen der geometrischen Eigenschaft:

$$ABC.abc = ACa.Bbc + ACb.Bac + ACc.Bab$$
$$0 = ACa.Abc + ACb.Aac + ACc.Aab$$

wo ABC, abc u. s. w. die Flächeninhalte der Dreiecke ABC, abc u. s. w. sind.

§. 6. Determinanten mit reciproken Elementen oder Determinanten von Determinanten.

Stellt man durch P die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots\ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

dar und setzt zur Abkürzung $\alpha_{r,s} = \frac{dP}{da_{r,s}}$; so versteht man unter der zur Determinante P gehörigen Determinante mit ***reciproken Elementen*** die folgende:

$$(41.) \quad S = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \ldots\ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \ldots\ldots & \alpha_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} \ldots\ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Es ist (§. 3) bekannt, dass zwischen den Elementen der Determinante P und denjenigen der Determinante S die Relationen:

$$(42.) \quad \begin{aligned} a_{r,1}\,\alpha_{r,1} + a_{r,2}\,\alpha_{r,2} + \cdots + a_{r,n}\,\alpha_{r,n} &= P \\ a_{r,1}\,\alpha_{s,1} + a_{r,2}\,\alpha_{s,2} + \cdots + a_{r,n}\,\alpha_{s,n} &= 0 \end{aligned}$$

stattfinden; daher wird man, wenn man die Determinanten P und S mit einander multiplicirt, haben:

$$P.S = \begin{vmatrix} P0 \ldots\ldots 0 \\ 0P \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00 \ldots\ldots P \end{vmatrix} = P^n$$

und daher:

$$(43.) \quad S = P^{n-1}.$$

Wenn man auf der rechten Seite der Gleichungen (42) $s = 1, 2 \ldots\ldots n$ setzt, so erhält man n Gleichungen, aus denen man die Werthe von $a_{r,1}, a_{r,2} \ldots\ldots a_{r,n}$ bestimmen kann. Man sieht leicht, dass:

$$a_{r,s} = \frac{1}{S} \frac{dS}{d\alpha_{r,s}} P$$

ist und daher nach (43):

$$(44.) \qquad P^{n-2} a_{r,s} = \frac{dS}{d\alpha_{r,s}} .$$

Bezeichnet man mit T und V die Determinanten mit reciproken Elementen, welche zu den Determinanten Q und R (28) (29) gehören, so wird man:

$$T = Q^{n-1} \qquad V = R^{n-1}$$

haben, und daher nach Gleichung (30):

$$V = S.\, T$$

dass heisst, das Produkt der Determinanten mit reciproken Elementen, welche den beiden Determinanten P und Q zugehören, ist gleich der Determinante mit reciproken Elementen, welche zu der Determinante R (dem Produkt der beiden Determinanten P und Q) gehört.

Anwendung.

Wenn man die Gleichungen (20) betrachtet, und mit $x_{r,1} : x_{r,2} : \ldots\ldots : x_{r,n}$ die Werthe der Verhältnisse $x_1 : x_2 : \ldots\ldots : x_n$ bezeichnet, welche man aus $n-1$ dieser Gleichungen erhält, indem man die r^{te} Gleichung ausschliesst, so erhält man:

$$x_{r,1} : x_{r,2} : \ldots\ldots : x_{r,n} = \alpha_{r,1} : \alpha_{r,2} : \ldots\ldots : \alpha_{r,n} .$$

Substituirt man diese Werthe in die Determinante:

$$A = \pm \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \ldots\ldots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \ldots\ldots & x_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \ldots\ldots & x_{n,n} \end{vmatrix}$$

so erhält man:

$$A = \pm \lambda . P^{n-1}$$

wobei λ eine unbestimmte Grösse ist. Wenn man $x_{r,s} = 1$ annimmt, so hat man:

$$\frac{1}{\lambda} = \alpha_{1,s}\ \alpha_{2,s}\ \ldots\ldots\ \alpha_{n,s} .$$

Vermittelst dieser Formel kann man die beiden Probleme lösen: 1. Den Flächeninhalt eines Dreiecks zu finden, von dem die Gleichungen der Seiten gegeben sind. 2. Das Volumen eines Tetraeders zu finden, von dem die Gleichungen der Flächen gegeben sind.

Die Gleichungen (43), (44) und die im §. 3 gefundene Gleichung (14) gehören zu einer Reihe von Relationen, welche zwischen Determinanten von Determinanten bestehen, und aus zwei allgemeinen Formeln folgen, wie wir gleich zeigen werden.

Betrachten wir die beiden Gruppen der Gleichungen (16), (17), und schreiben davon $i+1$ beliebige, auf einander folgende, aus der ersten Gruppe in der folgenden Weise:

$$a_{r,s}x_s+a_{r,s+1}x_{s+1}+\ldots+a_{r,u}x_u=u_r-(a_{r,1}x_1+\ldots+a_{r,s-1}x_{s-1}+a_{r,u+1}x_{u+1}+\ldots+a_{r,n}x_n)$$
$$a_{r+1,s}x_s+a_{r+1,s+1}x_{s+1}+\ldots+a_{r+1,u}x_u=u_{r+1}-(a_{r+1,1}x_1+\ldots+a_{r+1,s-1}x_{s-1}+a_{r+1,u+1}x_{u+1}+\ldots+a_{r+1,n}x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots

gen (16) den Werth von x_u als Function der n Grössen $x_1, \ldots x_{s-1}, x_{u+1} \ldots x_n$; u_r, $u_{r+1}, \ldots u_v$ nur auf *eine* Weise ausdrücken kann. Werden daher die Coefficienten von u_{r+a} (wobei a irgend eine Zahl unter denen der Reihe $0, 1 \ldots i$ ist) in den beiden obengenannten Werthen von x_u einander gleich gesetzt, so kommt die Gleichung:

$$P \frac{dS_{v,u}}{d\alpha_{v,u}} \frac{dP_{v,u}}{da_{r+a,u}} = P_{v,u} S_{r+a,u}.$$

Aus dieser folgt, wenn man $a = i$ annimmt, dass

$$(47.) \qquad P \frac{dS_{v,u}}{d\alpha_{v,u}} \frac{dP_{v,u}}{da_{v,u}} = P_{v,u} S_{v,u}$$

ist, und da:

$$\frac{dS_{v,u}}{d\alpha_{v,u}} = S_{v+1,u+1} \qquad \frac{dP_{v,u}}{da_{v,u}} = P_{v-1,u-1}$$

so folgt:

$$P . S_{v+1,u+1} P_{v-1,u-1} = P_{v,u} . S_{v,u}$$

also:

$$(48.) \qquad P^c S_{v+c,u+c} P_{v-1,u-1} = P_{v+c-1,\,u+c-1} S_{v,u}.$$

Wenn man in dieser Formel $r = s = 1$ setzt, so erhält man die von *Jacobi* und Herrn *Spottiswoode* gegebene.

Es ist klar, dass man eine zweite Formel, analog der Gleichung (47), erhalten kann, wenn man die angegebene Operation mit $i+1$ beliebigen, aufeinander folgenden, Gleichungen aus der Gruppe (17), und $n-i$ passend gewählten Gleichungen aus der Gruppe (16) ausführt. Man wird so zu der Gleichung:

$$(49.) \qquad P \frac{dS_{u,v}}{d\alpha_{u,v}} \frac{dP_{u,v}}{da_{u,v}} = P_{u,v} S_{u,v}$$

gelangen, in welcher:

$$S_{m,v} = \begin{vmatrix} \alpha_{s,r} & \ldots\ldots & \alpha_{u-1,r} & \alpha_{m,r} \\ \alpha_{s,r+1} & \ldots\ldots & \alpha_{u-1,r+1} & \alpha_{m,r+1} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{s,v} & \ldots\ldots & \alpha_{u-1,v} & \alpha_{m,v} \end{vmatrix}, \qquad P_{u,m} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots\ldots & a_{1,r-1} & a_{1,m} & a_{1,v+1} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ a_{s-1,1} & \ldots\ldots & a_{s-1,r-1} & a_{s-1,m} & a_{s-1,v+1} & \ldots\ldots & a_{s-1,n} \\ a_{u,1} & \ldots\ldots & a_{u,r-1} & a_{u,m} & a_{u,v+1} & \ldots\ldots & a_{u,n} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ a_{n,1} & \ldots\ldots & a_{n,r-1} & a_{n,m} & a_{n,v+1} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

und beachtet man, dass:

$$\frac{dS_{u,v}}{d\alpha_{u,v}} = S_{u-1,v-1} \qquad \frac{dP_{u,v}}{da_{u,v}} P_{u+1,v+1}$$

ist, so wird man haben:

$$(50.) \qquad P^c . S_{u-1,v-1} P_{u+c,v+c} = P_{u,v} S_{u+c-1,v+c-1}.$$

Wenn man in der Gleichung (48) $i = 0$ setzt, und daher $v = r$, $u = s$, so kommt, wegen

$$P_{r-1,s-1} = 1 \qquad S_{r,s} = S$$

die Gleichung:

$$P^c S_{r+c,s+c} = P_{r+c-1,s+c-1} \cdot S$$

welche als besonderen Fall ebensowohl die Gleichung (43) umfasst, die man erhält, indem man $r = s = 1$, $c = n$ setzt, als die Gleichung (44), welche man erhält, indem man $c = 1$ setzt.

Wenn man analog in der Gleichung (50) $i = 0$ setzt, und bemerkt, dass

$$S_{s-1,r-1} = 1 \qquad P_{s,r} = P \text{ *)}$$

so hat man:

$$P^{c-1} \cdot P_{s+c,r+c} = S_{s+c-1,r+c-1}$$

woraus man die Gleichung (14) erhält, indem man $c = 2$ setzt.

Anwendungen.

1. Es bedeute:

$$(51.) \qquad U = \Sigma_r a_{r,r} x_r^2 + 2 \Sigma_r \Sigma_s a_{r,s} x_r x_s,$$

worin $a_{r,s} = a_{s,r}$, eine quadratische Function mit n Variabeln. Bemerken wir, dass die Determinante P die Discriminante der Function U ist, d. h. das Resultat ist der Elimination der Grössen $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ aus den Gleichungen:

$$\frac{dU}{dx_1} = 0 \quad \frac{dU}{dx_2} = 0 \ldots\ldots \frac{dU}{dx_n} = 0.$$

Die quadratische Function mit n Variabeln:

$$V = \Sigma_r \alpha_{r,r} z_r^2 + 2 \Sigma_r \Sigma_s \alpha_{r,s} z_r z_s$$

in welcher $\alpha_{r,s} = \dfrac{dP}{da_{r,s}}$ heisst *reciproke Function* von U. Es ist leicht zu sehen, dass man die Function V in Determinantenform auf folgende Weise:

$$(52.) \quad V = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} & z_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} & z_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} & z_n \\ z_1 & z_2 & \ldots\ldots & z_n & 0 \end{vmatrix}$$

ausdrücken kann, und die Reciprocität zwischen den Functionen U und V wird klar, wenn man bemerkt, dass nach der Gleichung (44) die Function U unter die Form gebracht werden kann:

---

*) Die Richtigkeit der Gleichungen $P_{r-1,s-1} = 1$, $S_{s-1,r-1} = 1$ u. s. w. beweist sich leicht, wenn man die Identität bemerkt:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = \text{u. s. w.}$$

$$(53.) \qquad U = \frac{1}{P^{n-2}} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & x_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & x_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Nehmen wir an:

$$(54.) \qquad \begin{aligned} z_1 &= a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \ldots + a_{1,n}\,x_n \\ z_2 &= a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \ldots + a_{2,n}\,x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \ldots + a_{n,n}\,x_n \end{aligned}$$

so findet in diesem Falle die Gleichung:

$$(55.) \qquad V = -P.U$$

statt.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, erinnere man sich (§. 3), dass wenn zu den Elementen der letzten Colonne der Determinante V nach der Reihe diejenigen der vorletzten, multiplicirt in $-x_n$, addirt werden und diejenigen der drittletzten, multiplicirt in $-x_{n-1}$ und so fort, der Werth dieser Determinante selbst nicht geändert wird; aber indem man diese Operation ausführt, ändert sich die Determinante V in Folge der Gleichungen (51), (54) um in die folgende:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & 0 \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n & -U \end{vmatrix}$$

und daher findet die Gleichung (55) statt.

Die Gleichung $U = 0$ kann, für $n = 3$ oder $n = 4$, einen Kegelschnitt oder eine Fläche zweiter Ordnung darstellen; und in diesem Falle würde die Gleichung $V = 0$ die zugehörige reciproke Polare darstellen.

Die obigen Formeln sind von grossem Nutzen in der Theorie der reciproken Polaren und andern geometrischen Fragen, die sich auf Linien und Flächen zweiten Grades beziehen. Vermittelst der Gleichung (55) kann man das folgende Problem lösen: Wenn die Gleichung eines Kegelschnittes und die Coordinaten eines Punktes gegeben sind, ein Kriterium dafür aufzustellen, ob der Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnittes liege.

So wie man sagt, dass ein Punkt ausserhalb oder innerhalb eines Kegelschnittes liege, je nach dem man von ihm zwei reelle Tangenten an den Kegelschnitt

ziehen kann oder nicht, so wird man das verlangte Kriterium davon hernehmen können, ob die Coordinaten der Durchschnittspunkte der zu dem fraglichen Punkte gehörigen Polare mit dem Kegelschnitte reell oder imaginär sind. Behalten wir die Bezeichnungen der Anwendung 1. des §. 4 bei, so werden wir leicht finden, dass die Bedingung, welche zu erfüllen ist, damit die Verhältnisse $x : y : z$ der Coordinaten des Durchschnittspunktes des Kegelschnittes $\varphi(x, y, z) = 0$ und der Polare des Punktes x_0, y_0, z_0 reell seien, ist

$$\begin{vmatrix} a & h & f & x_1 \\ h & b & e & y_1 \\ f & e & c & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \end{vmatrix} \geqq 0$$

wo gesetzt ist:

$$x_1 = ax_0 + hy_0 + fz_0 \quad , \quad y_1 = hx_0 + by_0 + ez_0 \quad , \quad z_1 = fx_0 + ey_0 + cz_0$$

oder das verlangte Kriterium wird mit Rücksicht auf die Gleichung (55) sein:

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & e \\ f & e & c \end{vmatrix} \leqq 0.$$

Der Punkt wird daher ausserhalb oder innerhalb liegen, je nachdem jene beiden Ausdrücke gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Wir wollen bemerken, dass der erste von ihnen verschwindet, wenn der Punkt auf dem Kegelschnitte liegt, und der zweite, wenn der Kegelschnitt ein System von zwei Geraden ist.

2. Betrachtet man die Determinante:

$$H = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} & \alpha_1 & \mathfrak{z}_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} & \alpha_2 & \mathfrak{z}_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} & \alpha_n & \mathfrak{z}_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots\ldots & \alpha_n & \alpha & \beta \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 & \ldots\ldots & \mathfrak{z}_n & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

so wird nach der Formel (14):

$$H \frac{d^2 H}{d\alpha\, d\delta} = \frac{dH}{d\alpha} \frac{dH}{d\delta} - \frac{dH}{d\beta} \frac{dH}{d\gamma}$$

sein; oder wenn man die Bezeichnungen der Anwendung 1. beibehält und voraussetzt, dass $a_{r,s} = a_{s,r}$ und $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ ist, so hat man:

$$(56.) \qquad HP = VL - M^2$$

wo:

$$L = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & \alpha_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & z_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & z_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist.

Sei $A_{r,s}$ eine von $a_{r,s}$ abhängige und durch die Gleichung:

$$A_{r,s} = a_{r,s} + \alpha_r \alpha_s$$

definirte Grösse, und bezeichnen wir mit P_1, L_1, V_1, M_1, H_1 diejenigen Determinanten, welche man erhält, wenn man in den Determinanten P, L, V, M, H an Stelle der Elemente $a_{r,s}$ die Elemente $A_{r,s}$ setzt. Vermittelst des Princips, dass der Werth einer Determinante sich nicht ändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe oder einer Colonne diejenigen einer andern Reihe oder einer andern Colonne, nachdem sie durch ein und dieselbe Grösse multiplicirt sind, addirt, wird man leicht die Gleichungen:

$$L = L_1 \qquad M = M_1 \qquad H = H_1$$

beweisen.

Nun bemerken wir, dass man die Determinante V in der folgenden Weise:

$$V = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & z_1 & \alpha_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & z_2 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & z_n & \alpha_n \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

schreiben kann, und daher erhält man nach dem oben genannten Princip, indem man addirt: zu den Elementen der ersten Colonne diejenigen der letzten, multiplicirt in α_1; zu den Elementen der zweiten Colonne diejenigen der letzten, multiplicirt in α_2, und so fort:

$$V = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} & z_1 & \alpha_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} & z_2 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} & z_n & \alpha_n \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

oder:

$$V = V_1 + H_1 = V_1 + H.$$

Ebenso kann man die Determinante P schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} & \alpha_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} & \alpha_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} & \alpha_n \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

und führt man die oben angegebene Operation aus, so hat man leicht:

$$P = P_1 + L_1 = P_1 + L.$$

Diese Werthe von L und von H geben, substituirt in die Gleichung (56):

$$(57.) \qquad M^2 = PV_1 - VP_1 .$$

Haben wir V als die reciproke Function von U bezeichnet, so wird offenbar V_1 die reciproke Function der quadratischen Function:

$$U + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n)^2$$

sein.

Wenn wir $n = 3$ annehmen, so stellen die Gleichungen:

$$U = 0, \qquad U + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 = 0$$

zwei Kegelschnitte dar, welche doppelten Contact haben und die Gleichungen:

$$V = 0 \quad , \quad V_1 = 0$$

sind die entsprechenden reciproken Polaren. Nun kann nach Gleichung (57) die Gleichung $V_1 = 0$ die Form:

$$P_1 V + M^2 = 0$$

annehmen, welche zeigt, dass die beiden reciproken Polaren auch doppelten Contact haben, und dass die Berührungssehne die durch die Gleichung:

$$M = 0$$

dargestellte Gerade ist.

Ein analoges Theorem findet für die Oberflächen zweiten Grades statt.*)

§. 7. Von den Eigenschaften der Unterdeterminanten.

Man nennt *Unterdeterminante* einer *vollständigen* Determinante:

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

die Determinante, welche man erhält, wenn man eine beliebige Anzahl Reihen und Colonnen der vollständigen Determinante auslässt. Die Ordnung der Unterdeter-

*) Crelle. Journal für die Mathematik. Band 31.

minante wird durch die Anzahl der Reihen und Colonnen bestimmt, welche ausgelassen worden sind; so dass die Determinante:

$$(58.)\qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n-m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n-m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n-m,1} & a_{n-m,2} & \ldots\ldots & a_{n-m,n-m} \end{vmatrix}$$

eine Unterdeterminante der m^{ten} Ordnung ist. Wenn für die Hauptelemente der Unterdeterminante die ersten und zweiten Indices gleich sind, wie dies in der Determinante (58) stattfindet, so heisst die Unterdeterminante eine ***Hauptunterdeterminante.***

Um eine Bezeichnung für diese Art von Determinanten festsetzen zu können, wollen wir die Unterdeterminanten der m^{ten} Ordnung der Determinante P betrachten. Wir bilden die:

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots m} = u$$

Combinationen m^{ter} Classe der Indices $1, 2 \ldots\ldots n$ und ordnen dieselben nach einem bestimmten Gesetz, indem wir z. B. mit derjenigen anfangen, in der das Produkt der Indices am kleinsten ist, und dann die andern so folgen lassen, dass dies Produkt stets wächst. Den so geordneten Combinationen lassen wir die Zahlen:

$$1, 2, 3 \ldots\ldots u$$

entsprechen.

Seien r, s zwei von diesen Zahlen; wenn man nun in der Determinante P alle die Elemente unterdrückt, deren erster Index in der Combination r enthalten ist, und ebenso alle die, deren zweiter Index in der Combination s enthalten ist, so werden die Elemente, welche zurückbleiben, eine Unterdeterminante der Ordnung m bilden. Wir wollen diese Determinante durch das Symbol ${}^{(m)}P_{r,s}$ bezeichnen; das Symbol ${}^{(m)}P_{r,r}$ wird also eine Hauptunterdeterminante der m^{ten} Ordnung darstellen. Es ist klar, dass die Anzahl der Unterdeterminanten der m^{ten} Ordnung im Allgemeinen dem Quadrate der Zahl u gleich sein wird, so dass man aus ihnen die Determinante:

$$\begin{vmatrix} {}^{(m)}P_{1,1} & {}^{(m)}P_{1,2} & \ldots\ldots & {}^{(m)}P_{1,u} \\ {}^{(m)}P_{2,1} & {}^{(m)}P_{2,2} & \ldots\ldots & {}^{(m)}P_{2,u} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ {}^{(m)}P_{u,1} & {}^{(m)}P_{u,2} & \ldots\ldots & {}^{(m)}P_{u,u} \end{vmatrix} = {}^{(m)}S_u$$

bilden kann.

Diese Determinanten von Unterdeterminanten sind zuerst von Hrn. ***Cauchy****) betrachtet und von ihm ***derivirte*** Determinanten genannt worden.

Complement der Unterdeterminante ${}^{(m)}P_{r,s}$ heisst die Unterdeterminante des

*) Journal de l'École Polytechnique. Cahier 17.

$(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche man aus der Determinante P erhält, wenn man in ihr nur diejenigen Elemente stehen lässt, deren erster Index in der Combination r und deren zweiter Index in der Combination s enthalten ist. Dieses Complement kann durch das Symbol ${}^{(n-m)}P_{-r,-s}$ bezeichnet werden, und das Complement der Determinante (58) würde:

$$\begin{vmatrix} a_{v+1,v+1} & a_{v+1,v+2} & \cdots & a_{v+1,n} \\ a_{v+2,v+1} & a_{v+2,v+2} & \cdots & a_{v+2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,v+1} & a_{n,v+2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

sein, wo $n-m=v$ gesetzt ist. Die aus den Complementen der, die Determinante ${}^{(m)}S_u$ bildenden, Determinanten zusammengesetzte Determinante kann man mit ${}^{(n-m)}S_u$ bezeichnen; und die Determinanten ${}^{(m)}S_u$, ${}^{(n-m)}S_u$ heissen ***complementäre*** derivirte Determinanten

Erinnert man sich an die im §. 3. auseinandergesetzte Regel für die Bildung der Determinanten, so wird man leicht die Richtigkeit der beiden Gleichungen:

$$(59.)\quad \begin{aligned} {}^{(m)}P_{1,s}\ {}^{(n-m)}P_{-1,-s} + {}^{(m)}P_{2,s}\ {}^{(n-m)}P_{-2,-s} + \cdots + {}^{(m)}P_{u,s}\ {}^{(n-m)}P_{-u,-s} &= P \\ {}^{(m)}P_{1,s}\ {}^{(n-m)}P_{-1,-r} + {}^{(m)}P_{2,s}\ {}^{(n-m)}P_{-2,-r} + \cdots + {}^{(m)}P_{u,s}\ {}^{(n-m)}P_{-u,-r} &= 0 \end{aligned}$$

einsehen.

Wenn wir in diesen Gleichungen r und s gleich 1, 2, 3 ..... u setzen, so haben wir u^2 Gleichungen, aus welchen wir mit Anwendung der Regel für die Multiplikation der Determinanten erhalten:

$${}^{(m)}S_u\ {}^{(n-m)}S_u = P^u.$$

Die Formel (43) folgt aus dieser, wenn man $m=1$ setzt.

Wir wollen bemerken, dass nach dem, was wir über die Bezeichnung der Unterdeterminanten festgesetzt haben, die Gleichung (36) die Form:

$$Q\ {}^{(1)}P_{r,s} = {}^{(1)}R_{r,1}\ {}^{(n-1)}Q_{-1,-s} + {}^{(1)}R_{r,2}\ {}^{(n-1)}Q_{-2,-s} + \cdots + {}^{(1)}R_{r,n}\ {}^{(n-1)}Q_{-n,-s}$$

annimmt, ebenso könnte die Gleichung (38) geschrieben werden:

$$Q\ {}^{(2)}P_{r,s} = {}^{(2)}R_{r,1}\ {}^{(n-2)}Q_{-1,-s} + R_{r,2}\ {}^{(n-2)}Q_{-2,-s} + \cdots + {}^{(2)}R_{r,i}\ {}^{(n-2)}Q_{-i,-s}$$

wo $i=\dfrac{n(n-1)}{2}$ gesetzt ist; und im Allgemeinen führt die $m$malige Differentiation der Gleichung:

$$PQ = R$$

offenbar auf die Gleichung:

$$Q\,{}^{(m)}P_{r,s} = {}^{(m)}R_{r,1}\ {}^{(n-m)}Q_{-1,-s} + {}^{(m)}R_{r,2}\ {}^{(n-m)}Q_{-2,-s} + \cdots + {}^{(m)}R_{r,u}\ {}^{(m)}Q_{-u,-s}$$

Wenn man in dieser $s=1, 2, 3 \ldots u$ setzt, so erhält man u Gleichungen, welche, nach der Reihe mit:

$${}^{(m)}Q_{s,1} \quad {}^{(m)}Q_{s,2} \cdots {}^{(m)}Q_{s,u}$$

multiplicirt und addirt, mit Rücksicht auf:

$$(60.)\quad \begin{aligned} {}^{(m)}Q_{s,1}\,{}^{(n-m)}Q_{-s,-1} + {}^{(m)}Q_{s,2}\,{}^{(n-m)}Q_{-s,-2} + \ldots\ldots + {}^{(m)}Q_{s,u}\,{}^{(n-m)}Q_{-s,-u} &= Q \\ {}^{(m)}Q_{s,1}\,{}^{(n-m)}Q_{-r,-1} + {}^{(m)}Q_{s,2}\,{}^{(n-m)}Q_{-r,-2} + \ldots\ldots + {}^{(m)}Q_{s,u}\,{}^{(n-m)}Q_{-r-u} &= 0 \end{aligned}$$

die folgende geben:

$$(61.)\quad {}^{(m)}P_{r,1}\,{}^{(m)}Q_{s,1} + {}^{(m)}P_{r,2}\,{}^{(m)}Q_{s,2} + \ldots\ldots + {}^{(m)}P_{r,u}\,{}^{(m)}Q_{s,u} = {}^{(m)}R_{r,s}.$$

Die Gleichung (33) erhält man aus dieser, wenn man $m = 1$ setzt. Wenn wir $r = s$ annehmen, und die einander entsprechenden Elemente der Determinanten P und Q auch einander gleich setzen, so erhalten wir:

$$(62.)\quad ({}^{(m)}P_{r,1})^2 + ({}^{(m)}P_{r,2})^2 + \ldots\ldots + ({}^{(m)}P_{r,u})^2 = {}^{(m)}R_{r,r}.$$

Bezeichnet man mit ${}^{(m)}T_u$, ${}^{(m)}V_u$ die derivirten Determinanten der Determinanten Q , R, so folgt aus (61):

$${}^{(m)}S_u\,{}^{(m)}T_u = {}^{(m)}V_u$$

und analog:

$${}^{(n-m)}S_u\,{}^{(n-m)}T_u = {}^{(n-m)}V_u .$$

Mittelst der Gleichungen (59) (60) wird man eine Gleichung erhalten können, welche die Gleichung (39) als einen besondern Fall enthält. Durch Rechnungen, welche denen analog sind, die zu dieser letzten Gleichung führten, erhält man leicht:

$$(63.)\quad PQ = H_{s,1}\,K_{s,1} + H_{s,2}\,K_{s,2} + \ldots\ldots + H_{s,u}\,K_{s,u}$$

wo:

$$\begin{aligned} H_{s,r} &= {}^{(m)}Q_{r,1}\,{}^{(n-m)}P_{-1,-s} + {}^{(m)}Q_{r,2}\,{}^{(n-m)}P_{-2,-s} + \ldots\ldots + {}^{(m)}Q_{r,u}\,{}^{(n-m)}P_{-u,-s} \\ K_{s,r} &= {}^{(n-m)}Q_{-r,-1}\,{}^{(m)}P_{1,s} + {}^{(n-m)}Q_{-r,-2}\,{}^{(m)}P_{2,s} + \ldots\ldots + {}^{(n-m)}Q_{-r,-u}\,{}^{(m)}P_{u,s}. \end{aligned}$$

Die Formel für die Zerfällung (63) verdanken wir Herrn ***Sylvester*** *).

Anwendungen.

1. Es stelle:

$$U = \Sigma_r \Sigma_s a_{r,s} x_r x_s$$

eine quadratische Function von nVariabeln dar. Transformirt man diese Function in eine andere:

$$V = \Sigma_r \Sigma_s A_{r,s} z_r z_s$$

mittelst der lineären Substitution:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{1,1} z_1 + c_{2,1} z_2 + \ldots\ldots + c_{n,1} z_n \\ x_2 &= c_{1,2} z_1 + c_{2,2} z_2 + \ldots\ldots + c_{n,2} z_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{1,n} z_1 + c_{2,n} z_2 + \ldots\ldots + c_{n,n} z_n \end{aligned}$$

so hat man bekanntlich:

*) Philosophical Magazine. 1851.

$$(64.) \qquad A_{r,s} = A_{s,r} = c_{s,1} h_{1,r} + c_{s,2} h_{2,r} + \ldots\ldots + c_{s,n} h_{n,r}$$

wo $h_{1,r}$, $h_{2,r}$..... durch die Gleichungen (27) gegeben sind.

Wir wollen nun annehmen, dass die Function U in die Function V mittelst einer orthogonalen Substitution übergegangen sei, so dass die Coefficienten $c_{r,s}$ der Substitution den Gleichungen:

$$c_{r,1}^2 + c_{r,2}^2 + \ldots\ldots + c_{r,n}^2 = 1$$

$$c_{r,1} c_{s,1} + c_{r,2} c_{s,2} + \ldots\ldots + c_{r,n} c_{s,n} = 0$$

genügen, und also:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots\ldots + z_n^2.$$

Es ist bekannt, dass in diesem Falle die Function V auf die Form:

$$V = \Sigma_r A_r z_r^2$$

gebracht werden kann, und dass die Coefficienten A_r die Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades:

$$(65.) \quad f(-\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sind.

Diese Gleichung, auf welche zuerst *Laplace**) in seinen Untersuchungen über die säculären Ungleichheiten der Planeten stiess, und welche zu den ersten Arbeiten dieses Geometers über die Determinanten Veranlassung gab, hat n reelle Wurzeln, wie schon *Borchardt* und *Jacobi***) bewiesen haben. Erinnert man sich an die Art, wie diese Eigenschaft im §. 5 für die Gleichung dritten Grades von derselben Form bewiesen wurde, und setzt:

$$\varkappa_{r,s} = a_{r,1} a_{s,1} + a_{r,2} a_{s,2} + \ldots\ldots + a_{r,n} a_{s,n}$$

und also:

$$f(\lambda) f(-\lambda) = \begin{vmatrix} \varkappa_{1,1} - \lambda^2 & \varkappa_{1,2} & \ldots\ldots & \varkappa_{1,n} \\ \varkappa_{2,1} & \varkappa_{2,2} - \lambda^2 & \ldots\ldots & \varkappa_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \varkappa_{n,1} & \varkappa_{n,2} & \ldots\ldots & \varkappa_{n,n} - \lambda^2 \end{vmatrix}$$

so ist klar, dass die Realität der Wurzeln der Gleichung (65) bewiesen ist, sobald man gezeigt hat, dass alle Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ in der Gleichung:

$$(66.) \qquad (-1)^n f(\lambda) f(-\lambda) = \lambda^{2n} - H_{n-1} \lambda^{2n-2} + H_{n-2} \lambda^{2n-4} \ldots\ldots \mp H_1 \lambda_2 \pm H_0$$

positiv sind.

---

*) Histoire de l'Académie des Sciences, Année 1772.

**) Journal de Liouville. Tome 12. — Jacobi. Mathematische Werke. Band I.

Nun entsteht aber offenbar der Coefficient von λ^{2m} aus der Summe der Hauptunterdeterminanten m^{ter} Ordnung der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \varkappa_{1,1} & \varkappa_{1,2} & \ldots\ldots & \varkappa_{1\,n} \\ \varkappa_{2,1} & \varkappa_{2,2} & \ldots\ldots & \varkappa_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \varkappa_{n,1} & \varkappa_{n,2} & \ldots\ldots & \varkappa_{n,n} \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man mit ${}^{(m)}R_{r,r}$ irgend eine dieser Hauptunterdeterminanten und mit P die Determinante $f(0)$, und bemerkt, dass zwischen der Determinante $R_{r,r}$ und den Unterdeterminanten der Determinante P die Gleichung (62) besteht, so folgt hieraus, dass der Coefficient H_m gleich ist der Summe der Quadrate aller Unterdeterminanten m^{ter} Ordnung der Determinante P. Also müssen alle Coefficienten der Gleichung (66) positiv und die Wurzeln der Gleichung (65) reell sein.

2. Während wir die Bezeichnungen der Anwendung 1 beibehalten, bedeute N die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots\ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots\ldots & A_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots\ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

Welches auch die lineäre Substitution sei, vermittelst der man die Function U in die Function V transformirt, so findet doch zwischen den Unterdeterminanten der Determinante P und den Unterdeterminanten der Determinante N stets eine wichtige Relation statt, welche wir entwickeln wollen. Man bemerke, dass, da nach Gleichung (64):

$$N = QR$$

ist, wir analog mit (61):

$${}^{(m)}Q_{v,1}\ {}^{(m)}R_{1,s} + {}^{(m)}Q_{v,2}\ {}^{(m)}R_{2,s} + \ldots\ldots + {}^{(m)}Q_{v,u}\ {}^{(m)}R_{u,s} = {}^{(m)}N_{v,s}$$

haben; durch Bestimmung der Werthe von:

$${}^{(m)}R_{1,s}\ ,\ {}^{(m)}R_{2,s}\ \ldots\ldots\ {}^{(m)}R_{u,s}$$

aus derselben Gleichung (61), und Substitution derselben in die obige, folgt:

$${}^{(m)}N_{v,s} = \Sigma_r\ {}^{(m)}Q_{v,r}\left\{{}^{(m)}P_{r,1}\ {}^{(m)}Q_{s,1} + {}^{(m)}P_{r,2}\ {}^{(m)}Q_{s,2} + \ldots\ldots + {}^{(m)}P_{r,u}\ {}^{(m)}Q_{s,u}\right\}$$

was die angekündigte Relation ist. Wenn man in dieser Gleichung $v = s$ setzt und dann $s = 1,\ 2 \ldots\ldots u$, so erhält man die Gleichung:

$$\Sigma_s\ {}^{(m)}N_{s,s} = \Sigma_r\ \Sigma_s\ {}^{(m)}Q_{s,r}\left\{{}^{(m)}P_{r,1}\ {}^{(m)}Q_{s,1} + {}^{(m)}P_{r,2}\ Q_{s,2} + \ldots\ldots + {}^{(m)}P_{r,u}\ {}^{(m)}Q_{s,u}\right\}$$

welche für:

$$Q^2 = M$$

übergeht in:

$$\Sigma_s {}^{(m)}N_{s,s} = \Sigma_r \left({}^{(m)}P_{r,1} {}^{(m)}M_{r,1} + {}^{(m)}P_{r,2} {}^{(m)}M_{r,2} + \ldots + {}^{(m)}P_{r,u} {}^{(m)}M_{r,u} \right) .$$

Dies letztere Resultat könnte man auch direct erhalten, da $PM = N$ ist.

Wenn die lineäre Substitution, durch welche U in V übergeht, orthogonal ist, so hat man offenbar:

$$ {}^{(m)}M_{r,r} = 1 \qquad {}^{(m)}M_{r,s} = 0$$

und daher:

$$\Sigma_s {}^{(m)}N_{s,s} = \Sigma_s {}^{(m)}P_{s,s}$$

eine bekannte Formel.

3. Man nehme an, dass in den beiden quadratischen Functionen U, V sei:

$$(67.) \qquad \begin{aligned} a_{r,s} &= a_{s,r} = \gamma_{r,1}\gamma_{s,1} + \gamma_{r,2}\gamma_{s,2} + \ldots + \gamma_{r,n}\gamma_{s,n} \\ A_{r,s} &= A_{s,r} = \gamma_{1,r}\gamma_{1,s} + \gamma_{2,r}\gamma_{2,s} + \ldots + \gamma_{n,r}\gamma_{n,s} \end{aligned}$$

In diesem Falle sind jene Functionen unter sich gleich, das heisst, man kann sie mittelst einer lineären Substitution auf ein und dieselbe zurückführen. In der That, bezeichnet man mit H die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \ldots & \gamma_{1,n} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \ldots & \gamma_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \ldots & \gamma_{n,n} \end{vmatrix}$$

so wird man nach (67) haben:

$$P = N = H^2$$

das heisst, die Determinanten P, N, welche man erhält, indem man das Quadrat der Determinante H Reihen- oder Colonnenweise bildet, werden unter sich im Werth gleich, aber in der Form verschieden sein. Die Gleichheit der beiden Functionen U, V ist bewiesen, sobald gezeigt ist, dass die Coefficienten derselben Potenzen von λ in den beiden Gleichungen n^{ten} Grades:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} A_{1,1} - \lambda & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} - \lambda & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

unter sich gleich sind.

Wir bemerken, dass der Coefficient von λ^m in der ersten Gleichung aus der Summe der Hauptunterdeterminanten der m^{ten} Ordnung der Determinante P gebildet ist, und der Coefficient von λ^m in der zweiten Gleichung aus der Summe der Hauptunterdeterminanten der m^{ten} Ordnung der Determinante N. Da wir nun wissen, dass:

$$^{(m)}P_{r,r} = (^{(m)}H_{r,1})^2 + (^{(m)}H_{r,2})^2 + \ldots\ldots + (^{(m)}H_{r,u})^2$$
$$^{(m)}N_{r,r} = (^{(m)}H_{1,r})^2 + (^{(m)}H_{2,r})^2 + \ldots\ldots + (^{(m)}H_{u,r})^2$$

so besteht die Gleichung:

$$\Sigma_r {}^{(m)}P_{r,r} = \Sigma_r {}^{(m)}N_{r,r}$$

das heisst, die beiden Coefficienten von λ^m in den beiden obigen Gleichungen sind identisch.

Beispiel. Die Ellipsoide, welche durch die beiden Gleichungen:

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = \varkappa^2$$
$$(a_1x + a_2y + a_3z)^2 + (b_1x + b_2y + b_3z)^2 + (c_1x + c_2y + c_3z)^2 = \varkappa^2$$

dargestellt sind, sind unter sich congruent.*)

4. Das System lineärer algebraischer Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{1,s}x_s &= u_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{2,s}x_s &= u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{n,s}x_s &= u_n \end{aligned} \qquad (68.)$$

in welchem $n > s$ ist, heisst ein *überbestimmtes* System, da es aus einer grösseren Anzahl von Gleichungen besteht, als zur Bestimmung der Werthe der unbekannten Grössen nöthig ist.

Nehmen wir an, dass die Grössen u_1, u_2 ..... u_n unter sich durch die s Gleichungen:

$$\begin{aligned} c_{1,1}u_1 + c_{2,1}u_2 + \ldots\ldots + c_{n,1}u_n &= v_1 \\ c_{1,2}u_1 + c_{2,2}u_2 + \ldots\ldots + c_{n,2}u_n &= v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_{1,s}u_1 + c_{2,s}u_2 + \ldots\ldots + c_{n,s}u_n &= v_s \end{aligned} \qquad (69.)$$

verbunden seien, und substituiren in diesen für die Grössen u_1, u_2 ..... u_n die aus den Gleichungen (68) gegebenen Werthe, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} h_{1,1}x_1 + h_{2,1}x_2 + \ldots\ldots + h_{s,1}x_s &= v_1 \\ h_{1,2}x_1 + h_{2,2}x_2 + \ldots\ldots + h_{s,2}x_s &= v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ h_{1,s}x_1 + h_{2,s}x_2 + \ldots\ldots + h_{s,s}x_s &= v_s \end{aligned} \qquad (70.)$$

wo:

$$a_{1,r}c_{1,s} + a_{2,r}c_{2,s} + \ldots\ldots + a_{n,r}c_{n,s} = h_{r,s}. \qquad (71.)$$

Aus den Gleichungen (70) fliessen die folgenden:

*) Nouvelles Annales de Mathématiques rédigées par M. Terquem. Juillet 1853.

$$Hx_1 = v_1 \frac{dH}{dh_{1,1}} + v_2 \frac{dH}{dh_{1,2}} + \ldots\ldots + v_s \frac{dH}{dh_{1,s}}$$
$$Hx_2 = v_1 \frac{dH}{dh_{2,1}} + v_2 \frac{dH}{dh_{2,2}} + \ldots\ldots + v_s \frac{dH}{dh_{2,s}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Hx_s = v_1 \frac{dH}{dh_{s,1}} + v_2 \frac{dH}{dh_{s,2}} + \ldots\ldots + v_s \frac{dH}{dh_{s,s}}$$

in welchen H die Determinante

$$\begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \ldots\ldots & h_{1,s} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \ldots\ldots & h_{2,s} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ h_{s,1} & h_{s,2} & \ldots\ldots & h_{s,s} \end{vmatrix}$$

darstellt; wenn man in diesen letzten Gleichungen für $v_1, v_2 \ldots\ldots v_s$ die aus den Gleichungen (69) gegebenen Werthe setzt, so wird man die Gleichungen:

$$Hx_1 = \varkappa_{1,1} u_1 + \varkappa_{1,2} u_2 + \ldots\ldots + \varkappa_{1,n} u_n$$
$$Hx_2 = \varkappa_{2,1} u_1 + \varkappa_{2,2} u_2 + \ldots\ldots + \varkappa_{2,n} u_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Hx_s = \varkappa_{s,1} u_1 + \varkappa_{s,2} u_2 + \ldots\ldots + \varkappa_{s,n} u_n$$

erhalten, wo:

$$\varkappa_{r,i} = c_{i,1} \frac{dH}{dh_{r,1}} + c_{i,2} \frac{dH}{dh_{r,2}} + \ldots\ldots + c_{i,s} \frac{dH}{dh_{r,s}}.$$

Nun bemerke man, dass nach (71):

$$c_{i,s} = \frac{dh_{r,s}}{da_{i,r}}$$

ist, und also:

$$\varkappa_{r,i} = \frac{dH}{da_{i,r}}$$

Diese Werthe liefern:

$$Hx_1 = u_1 \frac{dH}{da_{1,1}} + u_2 \frac{dH}{da_{2,1}} + \ldots\ldots + u_n \frac{dH}{da_{n,1}}$$
$$Hx_2 = u_1 \frac{dH}{da_{1,2}} + u_2 \frac{dH}{da_{2,2}} + \ldots\ldots + u_n \frac{dH}{da_{n,2}} \qquad (72.)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Hx_s = u_1 \frac{dH}{da_{1,s}} + u_2 \frac{dH}{da_{2,s}} + \ldots\ldots + u_n \frac{dH}{da_{n,s}}$$

Die Determinante H ist eine Hauptunterdeterminante der $(n-s)^{\text{ten}}$ Ordnung der Determinante R (Gleichung 28); wenn man dieselbe also nach den Bestimmungen

im §. 7. mit dem Symbol ${}^{(n-s)}R_{u,u}$ bezeichnet, so wird man analog mit der Gleichung (61):

$$H = {}^{(n-s)}R_{u,u} = \Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r} {}^{(n-s)}Q_{u,r}$$

haben. Daher nehmen die Gleichungen (72) die Form an:

$$(73.)\quad \begin{aligned}
x_1\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r} {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= u_1\Sigma_r {}^{(n-s)}Q_{u,r}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{1,1}} + \ldots\ldots + u_n\Sigma_r {}^{(n-s)}Q_{u,r}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{n,1}}\\
x_2\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r} {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= u_1\Sigma_r {}^{(n-s)}Q_{u,r}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{1,2}} + \ldots\ldots + u_n\Sigma_r {}^{(n-s)}Q_{u,r}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{n,2}}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_s\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r} {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= u_1\Sigma_r {}^{(n-s)}Q_{u,r}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{1,s}} + \ldots\ldots + u_n\Sigma_r {}^{(n-s)}Q_{u,r}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{n,s}}.
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die Determinante ${}^{(n-s)}P_{u,r}$ nur eine Anzahl s^2 von den Elementen enthält, welche die Determinante P bilden, und dass die ersten Indices dieser Elemente in der Combination u nicht enthalten sein dürfen. Bezeichnen wir mit:

$$\begin{vmatrix}
a_{r_1,1} & a_{r_2,1} & \ldots\ldots & a_{r_s,1}\\
a_{r_1,2} & a_{r_2,2} & \ldots\ldots & a_{r_s,2}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
a_{r_1,s} & a_{r_2,s} & \ldots\ldots & a_{r_s,s}
\end{vmatrix}$$

die Determinante ${}^{(n-s)}P_{u,r}$, so werden die Gleichungen (73) in die Gleichungen:

$$(74.)\quad \begin{aligned}
x_1\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r} {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= \Sigma_r {}^{(n-s)}Q_{u,r}\left\{u_{r_1}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,1}} + \ldots\ldots + u_{r_s}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,1}}\right\}\\
x_2\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r} {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= \Sigma_r {}^{(n-s)}Q_{u,r}\left\{u_{r_1}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,2}} + \ldots\ldots + u_{r_s}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,2}}\right\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_s\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r} {}^{(n-s)}Q_{u,r} &= \Sigma_r {}^{(n-s)}Q_{u,r}\left\{u_{r_1}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,s}} + \ldots\ldots + u_{r_s}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,s}}\right\}
\end{aligned}$$

übergehen, wo $r_1, r_2 \ldots r_s$ Zahlen sind, die unter sich verschieden, und aus der Reihe 1, 2, 3.... n genommen sind.

Wenn nun aus s unter den Gleichungen (68) die Werthe von $x_1, x_2 \ldots x_s$ bestimmt werden, z. B. aus denen, in welchen die Grössen $u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$ die Indices $r_1, r_2 \ldots\ldots r_s$ haben, so erhalten wir die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
(x_1)^{(n-s)}P_{u,r} &= u_{r_1}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,1}} + \ldots\ldots + u_{r_s}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,1}} \\
(x_2)^{(n-s)}P_{u,r} &= u_{r_1}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,2}} + \ldots\ldots + u_{r_s}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,2}} \qquad (75.) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(x_s)^{(n-s)}P_{u,r} &= u_{r_1}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_1,s}} + \ldots\ldots + u_{r_s}\frac{d^{(n-s)}P_{u,r}}{da_{r_s,s}}
\end{aligned}
$$

wo x_1, x_2..... in Klammern geschlossen sind, weil sie aus einem überbestimmten System hergeleitet sind. Durch Vergleichung der Gleichungen (74) (75) hat man daher:

$$x_1 = \frac{\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}(x_1)}{\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}}, \quad x_2 = \frac{\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}(x_2)}{\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}} \ldots\ldots \quad x_s = \frac{\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}(x_s)}{\Sigma_r {}^{(n-s)}P_{u,r}\,{}^{(n-s)}Q_{u,r}}$$

und wenn die Coefficienten der Grössen x_1, x_2..... in den Gleichungen (68) identisch mit denen der Grössen u_1, u_2.... in den Gleichungen (69) gesetzt würden, so würde kommen:

$$x_1 = \frac{\Sigma_r \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2(x_1)}{\Sigma_r \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2}, \quad x_2 = \frac{\Sigma_r \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2(x_2)}{\Sigma_r \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2} \ldots\ldots \quad x_s = \frac{\Sigma_r \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2(x_s)}{\Sigma_r \left({}^{(n-s)}P_{u,r}\right)^2}.$$

§. 8. Von den überschlagenen und symmetrischen Determinanten.

Eine Determinante P, deren Elemente die Gleichung:

$$a_{r,s} + a_{s,r} = 0$$

erfüllen, heisst *überschlagen* (gobbo). Wenn die Elemente ausser dieser Bedingung auch noch die zweite:

$$a_{r,r} = 0$$

erfüllen, so nennt man die *überschlagene* Determinante *symmetrisch*.

Die Betrachtung der symmetrischen überschlagenen Determinanten ist derjenigen der einfach überschlagenen Determinanten voran zu stellen, weil man diese vermittelst der erstern ausdrücken kann. Um diese Eigenschaft zu beweisen, wollen wir bemerken, dass man im Allgemeinen jede Determinante P mittelst Determinanten ausdrücken kann, in denen die Hauptelemente Null sind. In der That, bezeichnen wir mit P_0 die Determinante, in welcher die Hauptelemente gleich Null gesetzt sind, und mit $({}^{(m)}P_{i,i})_0$ eine Hauptunterdeterminante der m^{ten} Ordnung der Determinante P, in welcher statt der Hauptelemente Null gesetzt ist, so haben wir:

$$(76.) \qquad P = P_0 + \Sigma_r a_{r,r}\,({}^{(1)}P_{i,i})_0 + \Sigma_r \Sigma_s a_{r,r}\,a_{s,s}\,({}^{(2)}P_{i,i})_0 + \ldots\ldots + a_{1,1}a_{2,2}\ldots\ldots a_{n,n}$$

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 \end{vmatrix} + \alpha_1 \begin{vmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \beta_3 & 0 \end{vmatrix} + \beta_2 \begin{vmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} + \gamma_3 \begin{vmatrix} 0 & \beta_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{vmatrix} + \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 .$$

Wenn nun die Determinante P überschlagen ist, so sind offenbar die Hauptunterdeterminanten $\left({}^{(m)}P_{i,i}\right)_0$ überschlagen und symmetrisch, und desshalb findet die oben genannte Eigenschaft statt.

Die überschlagenen symmetrischen Determinanten unterscheiden sich von allen andern Arten von Determinanten durch die beiden folgenden, ihnen eigenthümlichen Eigenschaften:

1. Jede symmetrische überschlagene Determinante ungerader Ordnung ist gleich Null. In der That, bemerken wir, dass die Entwicklung der Determinante P, vorausgesetzt, dass dieselbe symmetrisch und von ungerader Ordnung sei, die beiden Terme enthalten wird:

$$\pm a_{r,1} a_{1,s} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,s-1} & a_{2,s+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & \cdots & a_{r-1,s-1} & a_{r-1,s+1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,2} & a_{r+1,3} & \cdots & a_{r+1,s-1} & a_{r+1,s+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\pm a_{1,r} a_{s,1} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s-1,2} & a_{s-1,3} & \cdots & a_{s-1,r-1} & a_{s-1,r+1} & \cdots & a_{s-1,n} \\ a_{s+1,2} & a_{s+1,3} & \cdots & a_{s+1,r-1} & a_{s+1,r+1} & \cdots & a_{s+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Wenn man nun die Elemente jeder Colonne dieser letztern Determinante mit -1 multiplicirt, und bemerkt, dass die Colonnen in ungerader Anzahl vorhanden sind, wenn n ungerade ist, und Rücksicht auf die Relation $a_{r,s} + a_{s,r} = 0$ nimmt, so wird der zweite Term geschrieben werden können:

$$\mp a_{1,r} a_{s,1} \begin{vmatrix} 0 & a_{3,2} & \cdots & a_{r-1,2} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2,s-1} & a_{3,s-1} & \cdots & a_{r-1,s-1} & a_{r+1,s-1} & \cdots & a_{n,s-1} \\ a_{2,s+1} & a_{3,s+1} & \cdots & a_{r-1,s+1} & a_{r+1,s+1} & \cdots & a_{n,s+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2,n} & a_{3,n} & \cdots & a_{r-1,n} & a_{r+1,n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

und da nun diese letzte Determinante identisch mit der Determinante des ersten Terms ist, und $a_{r,1}a_{1,s} = a_{1,r}a_{s,1}$, so heben sich beide Terme auf. Daher können in der Entwicklung von P nur Terme von der Form:

$$\pm a_{1,r}a_{r,1}\begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & \cdots & 0 & a_{r-1,r+1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,2} & a_{r+1,3} & \cdots & a_{r+1,r-1} & 0 & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

bleiben, aber diese letzte Determinante ist symmetrisch, überschlagen und von der ungeraden Ordnung $n-2$; mithin wird jede symmetrische überschlagene Determinante von ungerader Ordnung Null sein, sobald die symmetrische überschlagene Determinante von der dritten Ordnung gleich Null ist. Da aber die Entwicklung dieser Determinante:

$$a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} = 0$$

ist, so findet diese Eigenschaft allgemein Statt.

2. Eine überschlagene symmetrische Determinante gerader Ordnung ist ein Quadrat. In der That wird die Entwicklung der Determinante P die Terme enthalten:

$$a_{1,r}^2\begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & \cdots & 0 & a_{r-1,r+1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{r+1,2} & a_{r+1,3} & \cdots & a_{r+1,r-1} & 0 & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \cdots & 0 \end{vmatrix}, a_{1,s}^2\begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,s-1} & a_{2,s+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s-1,2} & a_{s-1,3} & \cdots & 0 & a_{s-1,s+1} & \cdots & a_{s-1,n} \\ a_{s+1,2} & a_{s+1,3} & \cdots & a_{s+1,s-1} & 0 & \cdots & a_{s+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\pm 2a_{1,r}a_{1,s}\begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s-1,2} & a_{s-1,3} & \cdots & a_{s-1,r-1} & a_{s-1,r+1} & \cdots & a_{s-1,n} \\ a_{s+1,2} & a_{s+1,3} & \cdots & a_{s+1,r-1} & a_{s+1,r+1} & \cdots & a_{s+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Coefficienten von $a_{1,r}^2$, $a_{1,s}^2$, $\pm 2a_{1,r}a_{1,s}$ können beziehlich durch:

$$-\frac{d^2P}{da_{1,r}da_{r,1}}, \quad -\frac{d^2P}{da_{1,s}da_{s,1}}, \quad \pm\frac{d^2P}{da_{1,r}da_{s,1}}$$

dargestellt werden.

Nun ist aber nach Formel (14):

$$P\frac{d^2P}{da_{1,r}da_{r,1}} = \frac{dP}{da_{1,r}}\frac{dP}{da_{r,1}},\quad P\frac{d^2P}{da_{1,s}da_{s,1}} = \frac{dP}{da_{1,s}}\frac{dP}{da_{s,1}},\quad P\frac{d^2P}{da_{1,r}da_{s,1}} = \frac{dP}{da_{1,r}}\frac{dP}{da_{s,1}}$$

da $\frac{dP}{da_{i,i}}$ als eine überschlagene symmetrische Determinante von ungerader Ordnung verschwindet. Diese Gleichungen geben mit Rücksicht auf die Relation:

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = -\frac{dP}{da_{s,r}}$$

welche offenbar für jede symmetrische überschlagene Determinante von gerader Ordnung gilt, die Gleichung:

$$\left(\frac{d^2P}{da_{1,r}da_{s,1}}\right)^2 = \frac{d^2P}{da_{1,r}da_{r,1}}\cdot\frac{d^2P}{da_{1,s}da_{s,1}}$$

und diese ist der Ausdruck für die Eigenschaft, dass die Determinante P ein Quadrat ist.

Daher wird die Entwicklung der Determinante P die Form:

$$P = \left\{\pm a_{1,2}\left(\frac{d^2P}{da_{1,1}da_{2,2}}\right)^{\frac{1}{2}} \pm a_{1,3}\left(\frac{d^2P}{da_{1,1}da_{3,3}}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \ldots\ldots \pm a_{1,n}\left(\frac{d^2P}{da_{1,1}da_{n,n}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

annehmen können; oder allgemeiner;

$$(77.)\qquad P = \left\{\Sigma_s \pm a_{r,s}\left(\frac{d^2P}{da_{r,r}da_{s,s}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

wo $a_{1,1} = a_{2,2} = \ldots\ldots = 0$ zu setzen sind. Es ist zu beachten, dass die Determinante $\frac{d^2P}{da_{r,r}da_{s,s}}$ ein Quadrat ist, da sie eine symmetrische überschlagene Determinante von der geraden Ordnung $(n-2)$ ist.

Beispiel.

Setzt man:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 \end{vmatrix}$$

so ist

$$P = \left\{a_{1,2}\begin{vmatrix} 0 & a_{3,4} \\ a_{4,3} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} - a_{1,3}\begin{vmatrix} 0 & a_{2,4} \\ a_{4,2} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} + a_{1,4}\begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} \\ a_{3,2} & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

oder auch:

$$P = (a_{1,2}\,a_{3,4} - a_{1,3}\,a_{2,4} + a_{1,4}\,a_{2,3})^2 .$$

Bezeichnet man mit H die Quadratwurzel der Determinante P, so ist es wichtig zu beweisen, wie dieser Grösse eine Eigenschaft zukommt, welche analog

einer der Haupteigenschaften der Determinanten ist. Differentiirt man die Gleichung $P = H^2$ nach $a_{r,s}$, so erhält man:

$$(78.) \qquad \frac{dP}{da_{r,s}} = H \frac{dH}{da_{r,s}}$$

wo der Coefficient 2 fortgelassen ist, weil auf der linken Seite die Derivirte von P nach $a_{r,s}$ die Determinante der $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung darstellt, welche man aus P erhält, indem man die s^{te} Colonne und die r^{te} Reihe auslässt, ohne zu beachten dass $a_{r,s} = -a_{s,r}$ ist, während doch, wenn man den algebraischen Ausdruck H differentiirt, diese Gleichheit in Betracht kommt. Quadrirt man die obige Gleichung, so hat man:

$$\left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2 = P\left(\frac{dH}{da_{r,s}}\right)^2$$

und da:

$$P \frac{d^2P}{da_{r,r}da_{s,s}} = \left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2$$

so ist:

$$\left(\frac{d^2P}{da_{r,r}da_{s,s}}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{dH}{da_{r,s}}.$$

Dieser Werth in die Gleichung (77) substituirt, giebt:

$$P = \left\{\Sigma_s\left(a_{r,s}\frac{dH}{da_{r,s}}\right)\right\}^2$$

und daher:

$$H = \Sigma_s\left(a_{r,s}\frac{dH}{da_{r,s}}\right)$$

eine Gleichung, welche eine Eigenschaft der Function H ergiebt, die einer bekannten Eigenschaft der Determinanten analog ist.

Aber die characteristische Eigenschaft dieser Functionen H besteht darin, dass sie ihr Zeichen wechseln, sobald zwei Indices gegen einander permutirt werden. Wir wollen annehmen, dass in der Function H die Indices r,s gegen einander permutirt würden, und das, was aus H nach dieser Permutation wird, mit H_1 bezeichnen; dann hat man, da in den Termen von H, welche das Element $a_{r,s}$ enthalten, keines der übrigen Elemente mit dem Index r oder s behaftet ist:

$$\frac{dH}{da_{r,s}} = -\frac{dH_1}{da_{r,s}}.$$

Wenn nun aber diese Permutation in der Determinante P ausgeführt wird, so ändert diese ihren Werth nicht und lässt sich leicht auf ihre ursprüngliche Form zurückführen, und also wird man nach Gleichung (78):

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = H_1\frac{dH_1}{da_{r,s}} = -H_1\frac{dH}{da_{r,s}}$$

haben und folglich:

$$H_1 = -H.$$

Es ist klar, dass wenn zwei Paare von Indices permutirt werden, das Zeichen und der Werth von H ungeändert bleibt.

Anwendung.

Bezeichnet man mit $q_1, q_2 \ldots q_n$ n unabhängige Variabeln, von welchen die Coordinaten der Punkte eines bewegten Systems gegebene Functionen sind, mit T die halbe Summe der lebendigen Kräfte und mit $p_1, p_2 \ldots p_n$ die Ausdrücke:

$$\frac{dT}{dq'_1}, \quad \frac{dT}{dq'_2} \ldots \frac{dT}{dq'_n}$$

so ist bekannt, dass die Formeln für die Variation der willkürlichen Constanten durch die störenden Kräfte Ausdrücke enthalten, die analog sind dem einen oder dem andern der beiden folgenden:

$$[a_i, a_s] = \Sigma_r \left(\frac{dp_r}{da_i} \frac{dq_r}{da_s} - \frac{dp_r}{da_s} \frac{dq_r}{da_i} \right)$$

$$(a_i, a_s) = \Sigma_r \left(\frac{da_i}{dp_r} \frac{da_s}{dq_r} - \frac{da_i}{dq_r} \frac{da_s}{dp_r} \right)$$

in welchen r die Werthe $1, 2 \ldots 2n$ hat und $a_1, a_2 \ldots a_{2n}$ $2n$ willkürliche Constanten sind, die bei der Integration der Bewegungsgleichungen eingeführt wurden. Herr ***Cauchy****) hat bewiesen, dass diese Ausdrücke durch $2n$ Gruppen von Gleichungen von der Art der folgenden:

$$\begin{aligned}
&a_{r,1}c_{1,1} + a_{r,2}c_{1,2} + \ldots + a_{r,2n}c_{1,2n} = 0 \\
&a_{r,1}c_{2,1} + a_{r,2}c_{2,2} + \ldots + a_{r,2n}c_{2,2n} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{r,1}c_{r,1} + a_{r,2}c_{r,2} + \ldots + a_{r,2n}c_{r,2n} = 1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{r,1}c_{2n,1} + a_{r,2}c_{2n,2} + \ldots + a_{r,2n}c_{2n,2n} = 0
\end{aligned} \tag{79.}$$

unter einander verbunden sind, wo der Kürze wegen:

$$[a_i, a_s] = c_{i,s} \qquad (a_i, a_s) = a_{i,s}$$

gesetzt ist.

Die Ausdrücke $c_{i,s}$, $a_{i,s}$ erfüllen offenbar die Gleichungen:

$$c_{s,s} = a_{s,s} = 0 \qquad c_{i,s} = -c_{s,i} \qquad a_{i,s} = -a_{s,i}$$

daher werden die beiden Determinanten:

*) Journal de Liouville T. 2. Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences. Juillet 1853.

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,2n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \ldots\ldots & a_{2n,2n} \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots\ldots & c_{1,2n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots\ldots & c_{2,2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_{2n,1} & c_{2n,2} & \ldots\ldots & c_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

überschlagene symmetrische Determinanten von gerader Ordnung sein.

Wir bemerken, dass, nach den Gleichungen (79) und den ihnen analogen, zwischen den Determinanten P, Q die Relation:

$$PQ = 1$$

besteht, und dass man aus denselben Gleichungen (79):

$$a_{r,s} = \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dc_{r,s}}$$

erhält; setzt man nun $Q = K^2$ so folgt, weil nach Gleichung (78):

$$\frac{dQ}{dc_{r,s}} = K\frac{dK}{dc_{r,s}},$$

offenbar:

$$a_{r,s} = \frac{1}{K}\frac{dK}{dc_{r,s}}$$

eine Gleichung, vermittelst welcher wir alle Werthe von $(a_r\ ,\ a_s)$ als Functionen von $[a_r\ ,\ a_s]$ erhalten.

Wegen der beiden, für die überschlagenen symmetrischen Determinanten bewiesenen Eigenschaften, nimmt die Gleichung (76), wenn P irgend eine überschlagene Determinante bedeutet, eine der beiden Formen an:

für ein gerades n: $P = P_0 + \Sigma_r \Sigma_s a_{r,r}\, a_{s,s}\, ({}^{(2)}P_{i,i})_0 + \ldots\ldots + a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{n,n}$

für ein ungerades n: $P = \Sigma_r\, a_{r,r}\, ({}^{(1)}P_{i,i})_0 + \ldots\ldots + a_{1,1}\, a^2_{,2} \ldots\ldots a_{n,n}$.

Wenn die Hauptelemente alle gleich Eins sind, werden die Formeln:

$$P = P_0 + \Sigma_i({}^{(2)}P_{i,i})_0 + \ldots\ldots + 1$$

$$P = \Sigma_i({}^{(1)}P_{i,i})_0 + \Sigma_i({}^{(3)}P_{i,i})_0 + \ldots\ldots + 1$$

werden, und da die überschlagenen symmetrischen Determinanten von gerader Ordnung P_0 , $({}^{(1)}P_{i,i})_0$, $({}^{(2)}P_{i,i})_0$ u. s. w. Quadrate sind, so wird die Determinante P sowohl für den Fall, dass n gerade ist, wie für den, dass n ungerade ist, gleich einer Summe von Quadraten.

Beispiel. Nehmen wir $n = 4$ an, so ist:

$$P = (a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3})^2 + a^2_{1,2} + a^2_{1,3} + a^2_{1,4} + a^2_{2,3} + a^2_{2,4} + a^2_{3,4} + 1$$

und für $n = 3$:

$$P = a^2_{1,2} + a^2_{1,3} + a^2_{2,3} + 1\,.$$

Es mögen die beiden Gruppen von Gleichungen:

$$(80.)\quad \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{1,n}x_n &= u_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{2,n}x_n &= u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{n,n}x_n &= u_n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots\ldots + a_{n,1}x_n &= v_1 \\ a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots\ldots + a_{n,2}x_n &= v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots\ldots + a_{n,n}x_n &= v_n \end{aligned}$$

betrachtet werden, in welchen:

$$a_{r,r} = 1 \quad , \quad a_{r,s} + a_{s,r} = 0$$

angenommen wird. Multiplicirt man die Gleichungen der ersten Gruppen nach der Reihe mit:

$$c_{r,1} \; , \; c_{r,2} \ldots\ldots \; c_{r,n}$$

und addirt die Resultate, so kommt:

$$(81.)\quad h_{r,1}x_1 + h_{r,2}x_2 + \ldots\ldots + h_{r,n}x_n = c_{r,1}u_1 + c_{r,2}u_2 + \ldots\ldots + c_{r,n}u_n$$

wo:

$$(82.)\qquad a_{1,s}c_{r,1} + a_{2,s}c_{r,2} + \ldots\ldots + a_{n,s}c_{r,n} = h_{r,s}$$

ist.

Bezeichnet man mit P die überschlagene Determinante, welche aus den Elementen $a_{r,s}$ gebildet ist, setzt $\alpha_{r,s} = \frac{dP}{da_{r,s}}$, und nimmt endlich an, dass:

$$(83.)\quad Pc_{r,1} = 2\alpha_{1,r} \; , \; Pc_{r,2} = 2\alpha_{2,r} \ldots\ldots \; Pc_{r,r} = 2\alpha_{r,r} - P, \ldots\ldots \; Pc_{r,n} = 2\alpha_{n,r}$$

sei, so folgt offenbar aus der Gleichung (82):

$$h_{r,r} = 1 \qquad h_{r,s} = -a_{r,s}$$

daher geht die Gleichung (81) über in:

$$a_{1,r}x_1 + a_{2,r}x_2 + \ldots\ldots + a_{n,r}x_n = c_{r,1}u_1 + c_{r,2}u_2 + \ldots\ldots + c_{r,n}u_n$$

und mit Rücksicht auf die zweite Gruppe der Gleichungen (80) erhält man die folgenden:

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{1,1}u_1 + c_{1,2}u_2 + \ldots\ldots + c_{1,n}u_n \\ v_2 &= c_{2,1}u_1 + c_{2,2}u_2 + \ldots\ldots + c_{2,n}u_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= c_{n,1}u_1 + c_{n,2}u_2 + \ldots\ldots + c_{n,n}u_n \; . \end{aligned}$$

Verfährt man mit der zweiten Gruppe der Gleichungen analog wie mit der ersten Gruppe, so wird man zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_1 &= c_{1,1}v_1 + c_{2,1}v_2 + \ldots\ldots + c_{n,1}v_n \\ u_2 &= c_{1,2}v_1 + c_{2,2}v_2 + \ldots\ldots + c_{n,2}v_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= c_{1,n}v_1 + c_{2,n}v_2 + \ldots\ldots + c_{n,n}v_n \end{aligned}$$

gelangen.

Aus der Vergleichung dieser beiden letzten Gruppen von Gleichungen ergiebt sich, dass die Coefficienten $c_{r,s}$ durch die $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen:

$$(84.) \qquad \begin{aligned} c_{1,r}c_{1,s} + c_{2,r}c_{2,s} + \ldots\ldots + c_{n,r}c_{n,s} &= 0 \\ c_{1,r}^2 + c_{2,r}^2 + \ldots\ldots + c_{n,r}^2 &= 1 \end{aligned}$$

verbunden sind, und da die Anzahl dieser Coefficienten selbst n^2 ist, so können $\frac{n(n-1)}{2}$ von ihnen willkürlich angenommen und die übrigen $\frac{n(n+1)}{2}$ als Functionen der ersten bestimmt werden; oder es können auch alle diese n^2 Coefficienten als Functionen von $\frac{n(n-1)}{2}$ willkürlichen Grössen bestimmt werden. Die durch die Gleichungen (83) gelieferten Werthe der Coefficienten $c_{r,s}$ erfüllen diese Bedingungen genau, da sie offenbar den Gleichungen (84) genügen, und die Grössen $a_{r,s}$, als Functionen welcher diese Coefficienten gegeben sind, von der Anzahl $\frac{n(n-1)}{2}$ sind.

Beispiel. Es sei:

$$h = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

so werden wir die neun Gleichungen:

$$(85.) \qquad \begin{array}{lll} ha_1 = 1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 & hb_1 = 2(\lambda\mu - \nu) & hc_1 = 2(\lambda\nu + \mu) \\ ha_2 = 2(\lambda\mu + \nu) & hb_2 = 1 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2 & hc_2 = 2(\mu\nu - \lambda) \\ ha_3 = 2(\lambda\nu - \mu) & hb_3 = 2(\mu\nu + \lambda) & hc_3 = 1 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2 \end{array}$$

haben, und die Grössen $a_1, a_2 \ldots\ldots$, welche dann durch die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_3 &= 0 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 &= 0 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

unter einander verbunden sind, werden die neun Cosinus der Winkel darstellen können, welche zwei Systeme von drei rechtwinkligen Achsen mit einander bilden. In diesem Falle lassen die willkürlichen Grössen λ, μ, ν eine geometrische Deutung zu, wie Herr *Rodriguez**) gezeigt hat.

Wir wollen bemerken, dass in dem Falle, wo zwei Achsen eines der beiden Systeme keinen rechten Winkel mit einander bilden, wo also:

$$a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = \omega$$

---

*) Journal de Liouville. T. V. Die von Herrn *Rodriguez* gefundenen Formeln unterscheiden sich nur in der Form von den von *Euler* und *Lexell* im XX. Bande der Novi Commentarii Academiae Petropolitanae 1775. gegebenen.

sein würde, die Werthe der neun Cosinus als Functionen der drei Grössen λ, μ, ν und von ω bestimmt werden können, denn für sechs dieser Cosinus z. B. für a_1, b_1, c_1; a_3, b_3, c_3 können die obigen Werthe beibehalten werden, und die Werthe der drei Cosinus a_2, b_2, c_2 werden als Functionen von λ, μ, ν, ω vermittelst der bekannten Gleichungen gegeben:

$$a_1(1-\omega^2) = b_2c_3 - b_3c_2 \quad , \quad b_1(1-\omega^2) = c_2a_3 - c_3a_2 \quad , \quad c_1(1-\omega^2) = a_2b_3 - a_3b_2$$

und zugleich ist:

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1.$$

Anwendungen.

1. *Theorem.* Die Determinante:

$$H = \begin{vmatrix} c_{1,1}-1 & c_{1,2} & \ldots\ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2}-1 & \ldots\ldots & c_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots\ldots & c_{n,n}-1 \end{vmatrix}$$

ist gleich Null, wenn n ungerade ist und ist gleich $2^n \frac{P_0}{P}$, wenn n gerade ist.

In der That, substituirt man in der Determinante H für $c_{1,1}$, $c_{1,2}$ ..... die Werthe (83), so hat man:

$$H = \frac{2^n}{P^n} \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}-P & \alpha_{2,1} & \ldots\ldots & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2}-P & \ldots\ldots & \alpha_{n,2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \ldots\ldots & \alpha_{n,n}-P \end{vmatrix}$$

und multiplicirt man diese letzte Determinante durch die Determinante P, so erhält man leicht:

$$H = (-1)^n \frac{2^n}{P} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Wenn nun n ungerade ist, so wird die Determinante der rechten Seite, da sie überschlagen symmetrisch und von ungerader Ordnung ist, gleich Null, und daher $H = 0$, und wenn n gerade ist, so wird $H = \frac{2^n P_0}{P}$.

In dem Falle, wo $n = 3$ ist, enthält dieses Theorem den Beweis eines von

Euler ausgesprochenen Satzes, der für die Bewegung eines festen Körpers gilt. *) Dieser Satz besteht darin, dass sich immer eine Gerade angeben lässt, welche durch einen willkürlichen Punkt des Körpers (Centrum) geht und sich mit ihm bewegt, von der Art, dass ihre Richtung nach Verlauf einer beliebigen Zeit parallel ihrer anfänglichen Richtung ist. Bezeichnet man mit x, y, z die Coordinaten eines Punktes des Körpers in Bezug auf drei *im Körper* feste Achsen, so sind die Cosinus der Winkel, welche die durch jenen Punkt und durch das Centrum gehende Gerade anfangs mit drei *im Raume* festen Achsen bildet:

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \quad , \quad \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \quad , \quad \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$$

und die Cosinus der Winkel, welche dieselbe Gerade nach Verlauf einer beliebigen bestimmten Zeit mit diesen festen Achsen bildet:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \quad \frac{a_2x+b_2y+c_2z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \quad \frac{a_3x+b_3y+c_3z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$$

wo $a_1, a_2 \ldots\ldots$ die neun Cosinus der Winkel u. s. w. sind. Daher sind für den Parallelismus der beiden Richtungen dieser Geraden die Gleichungen erforderlich:

$$\begin{aligned} x &= a_1x+b_1y+c_1z \\ y &= a_2x+b_2y+c_2z \\ z &= a_3x+b_3y+c_3z \end{aligned} ,$$

d. h. es müsste sein:

$$\begin{vmatrix} a_1-1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-1 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

was nach dem bewiesenen Theorem der Fall ist.

Wir halten es nicht für unpassend, hinzuzufügen, wie die geometrische Bedeutung der unbestimmten Grössen λ, μ, ν, die oben erwähnt wurde, direkt gefunden werden kann. Wir bemerken zu diesem Zwecke, dass aus den Gleichungen (85) folgt:

$$\begin{aligned} \lambda a_1+\mu b_1+\nu c_1 &= \lambda \\ \lambda a_2+\mu b_2+\nu c_2 &= \mu \\ \lambda a_3+\mu b_3+\nu c_3 &= \nu \end{aligned} ,$$

daher können wir setzen:

$$\lambda = \varkappa\cos\alpha \quad , \quad \mu = \varkappa\cos\beta \quad , \quad \nu = \varkappa\cos\gamma ,$$

wo $\varkappa$ eine unbestimmte Grösse, und α, β, γ die Winkel bedeuten, welche die Gerade, die in den beiden Lagen des Körpers parallele Richtungen hat, mit drei, im Körper festen, Achsen bildet. Wenn wir mit Θ den Neigungswinkel zweier Ebenen

*) Theoria motus corporum rigidorum 1740. Dieser Satz ist von *Piola* vermittelst der Formeln von *Monge* in einer Abhandlung bewiesen, welche in den Atti della Società Italiana delle Scienze, 1839, veröffentlicht ist.

bezeichnen, von denen die eine durch die erste Lage der Geraden und eine der im Körper festen Achsen geht, während der Körper sich in der ursprünglichen Stellung befindet (ein Winkel, welcher sich nicht ändert, welches auch die Achse sei, die man betrachtet), so werden wir nach einer bekannten Formel die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sin^2\alpha \cos\Theta + \cos^2\alpha \\ b_2 &= \sin^2\beta \cos\Theta + \cos^2\beta \\ c_3 &= \sin^2\gamma \cos\Theta + \cos^2\gamma \end{aligned}$$

haben, aus denen:

$$a_1 + b_2 + c_3 = 1 + 2\cos\Theta$$

folgt, und nach den Gleichungen (85):

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\Theta.$$

In dieser Weise wird die Grösse k bestimmt, und wir erhalten:

$$\lambda = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta \cdot \cos\alpha \quad , \quad \mu = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta \cdot \cos\beta \quad , \quad \nu = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta \cdot \cos\gamma.$$

Wir bemerken, dass das mechanische Theorem *Euler's* dem folgenden geometrischen entspricht: Wenn zwei Systeme rechtwinkliger Achsen gegeben sind, welche einen gemeinsamen Ursprung haben, so kann man eine durch den Ursprung gehende Gerade bestimmen, um welche eins der beiden Systeme so gedreht werden kann, dass die Achsen desselben mit denen des andern Systems zusammenfallen. Es ist klar, dass in diesem Falle der Winkel Θ das Mass der Drehung ist.

2. Nehmen wir an, dass a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 die Cosinus der Winkel darstellen, welche drei rechtwinklige, in einem beweglichen Körper feste Achsen mit drei im Raume festen Achsen bilden, und bezeichnen mit p, q, r die Componenten der Winkelgeschwindigkeit des Körpers in Bezug auf die drei beweglichen Achsen, so haben wir, wie bekannt ist, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p &= a_3 a_2' + b_3 b_2' + c_3 c_2' \\ q &= a_1 a_3' + b_1 b_3' + c_1 c_3' \\ r &= a_2 a_1' + b_2 b_1' + c_2 c_1' \end{aligned}$$

wenn man in diesen für a_1, a_2 .... die Werthe (85) substituirt, so folgt:

$$hp = 2(\mu'\nu - \mu\nu' - \lambda') \quad , \quad hq = 2(\nu'\lambda - \nu\lambda' - \mu') \quad , \quad hr = 2(\lambda'\mu - \lambda\mu' - \nu')$$

und daher:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \tfrac{1}{2}(r\mu - q\nu - p - \lambda m) \\ \mu' &= \tfrac{1}{2}(p\nu - r\lambda - q - \mu m) \\ \nu' &= \tfrac{1}{2}(q\lambda - p\mu - r - \nu m) \end{aligned} \qquad (86.)$$

wo der Kürze wegen:

$$\lambda p + \mu q + \nu r = m$$

gesetzt ist.

Diese letzten Gleichungen geben, wenn sie nach der Reihe mit λ, μ, ν multiplicirt und dann addirt werden, leicht die Gleichung:

$$h' + mh = 0$$

und mit p, q, r multiplicirt und addirt, die Gleichung;

$$\omega^2 + m^2 = -2(\lambda' p + \mu' q + \nu' r)$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers ist.

Wenn der Körper sich um einen festen Punkt dreht, und die drei mit demselben beweglichen Achsen Hauptachsen des Körpers sind; wenn ferner A, B, C die Hauptträgheitsmomente und T die halbe Summe der lebendigen Kräfte bedeuten, so ist:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

und setzt man:

$$u = \frac{dT}{d\lambda'} \quad , \quad v = \frac{dT}{d\mu'} \quad , \quad w = \frac{dT}{d\nu'}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}hu &= \quad Ap \quad + Bq\nu - Cr\mu \\ -\frac{1}{2}hv &= -Ap\nu + Bq \quad + Cr\lambda \\ -\frac{1}{2}hw &= \quad Ap\mu - Bq\lambda \quad + Cr \end{aligned} \tag{87.}$$

woraus:

$$2Ap = v\nu - w\mu - u - \lambda\sigma \quad , \quad 2Bq = w\lambda - u\nu - v - \mu\sigma \quad , \quad 2Cr = u\mu - v\lambda - w - \nu\sigma$$

folgt, während $\sigma = \lambda u + \mu v + \nu w$ ist. Nun hat man aber, wenn U die Kräftefunction bezeichnet, bekanntlich die Gleichungen:

$$u' = -\frac{d(T-U)}{d\lambda} \quad , \quad v' = -\frac{d(T-U)}{d\mu} \quad , \quad w' = -\frac{d(T-U)}{d\nu}$$

daher werden wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2}(p\sigma + um + rv - qw) + \frac{dU}{d\lambda} \\ v' &= \frac{1}{2}(q\sigma + vm + pw - ru) + \frac{dU}{d\mu} \\ w' &= \frac{1}{2}(r\sigma + wm + qu - pv) + \frac{dU}{d\nu} \end{aligned}$$

haben.

Diese Gleichungen zusammen mit den Gleichungen (86) sind die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt unter der von *Hamilton* angegebenen Form.

Wir bemerken noch: wenn der Körper bloss von augenblicklichen Kräften sollicitirt wird, und ξ, η, ζ die Winkel bezeichnen, welche die Achse des beschleunigenden Paares, die Achse des Impulsionspaares und die augenblickliche Drehungsachse mit derjenigen Geraden bilden, von welcher am Schluss der Anwendung 1. die Rede war (eine Gerade, welche von Herrn *Cayley* resultirende Achse ge-

nannt worden ist), ferner g, l, ω das Moment des beschleunigenden Paares, das des Impulsionspaares und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers und wenn endlich:

$$Ap\lambda + Bq\mu + Cr\nu = \psi \quad , \quad Ap'\lambda + Bq'\mu + Cr'\nu = \varphi$$

gesetzt ist, so finden die Gleichungen statt:

$$\varphi = g \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta . \cos\xi \quad , \quad \psi = l \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta . \cos\eta \quad , \quad m = \omega \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta . \cos\zeta$$

und da die Gleichungen (87) nach der Reihe mit λ, μ, ν multiplicirt und addirt, liefern:

$$h\sigma + 2\psi = 0$$

so folgt noch:

$$\sigma + l \sin\Theta . \cos\eta = 0.$$

Die Nützlichkeit dieser Formeln in der Behandlung des Problems der Bewegung eines, von augenblicklichen Kräften sollicitirten, Körpers um einen festen Punkt, zeigt sich an den von Herrn *Cayley**) in dieser Frage erhaltenen Resultaten.

Eine Determinante P, deren conjugirte Elemente die Bedingung:

$$a_{r,s} = a_{s,r}$$

erfüllen, heisst *symmetrische* Determinante.

Daher ist eine gerade Potenz von jeder beliebigen Determinante eine symmetrische Determinante. Und da in einer symmetrischen Determinante P die in der r^{ten} Colonne stehenden Elemente denen gleich sind, welche die r^{te} Reihe bilden, so ist:

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = \frac{dP}{da_{s,r}}$$

das heisst, die Determinante mit reciproken Elementen von einer symmetrischen Determinante ist ebenfalls symmetrisch. Folglich werden die Werthe von x_1, x_2 ..... x_n, die aus dem System der algebraischen lineären Gleichungen (16. §. 4) in dem Falle, dass $a_{r,s} = a_{s,r}$, fliessen, die Form:

$$\begin{aligned}
Px_1 &= u_1 \frac{dP}{da_{1,1}} + \tfrac{1}{2}u_2 \frac{dP}{da_{1,2}} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{2}u_n \frac{dP}{da_{1,n}} \\
Px_2 &= \tfrac{1}{2}u_1 \frac{dP}{da_{1,2}} + u_2 \frac{dP}{da_{2,2}} + \ldots\ldots + \tfrac{1}{2}u_n \frac{dP}{da_{2,n}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Px_n &= \tfrac{1}{2}u_1 \frac{dP}{da_{1,n}} + \tfrac{1}{2}u_2 \frac{dP}{da_{2,n}} + \ldots\ldots + u_n \frac{dP}{da_{n,n}}
\end{aligned}$$

annehmen, wo $\dfrac{dP}{da_{r,s}}$ die, nach $a_{r,s}$ genommene Derivirte der Entwicklung der symmetrischen Determinante P bezeichnet.

---

*) The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. Vol. 1. 1846.

Aus der Formel (14) erhält man für den Fall, dass P eine symmetrische Determinante ist:

$$P\frac{d^2P}{da_{r,r}da_{s,s}} = \frac{dP}{da_{r,r}}\frac{dP}{da_{s,s}} - \left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2$$

und wenn man $\frac{dP}{da_{r,r}} = 0$ annimmt, so folgt:

$$P\frac{d^2P}{da_{r,r}da_{s,s}} = -\left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right)^2$$

das heisst, die beiden symmetrischen Determinanten P und $\frac{d^2P}{da_{r,r}da_{s,s}}$ haben entgegengesetzte Zeichen.

Zu der Klasse der symmetrischen Determinanten gehören auch die Determinanten von der Form:

$$H_{2n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

für welche die durch die Gleichung:

$$\frac{dH_{2n-1}}{da_{2n-1}} = H_{2n-3}$$

ausgedrückte Eigenschaft gilt.

Die characteristische Eigenschaft dieser Determinanten ist in der Theorie der ***Invarianten*** weiter entwickelt worden.

Anwendung.

Bezeichnet man mit s_r die Summe der r^{ten} Potenzen der Wurzeln der Gleichung:

$$V(x) = a_n + a_{n-1}x + \ldots + a_1x^{n-1} + x^n = 0$$

so bestehen bekanntlich die Relationen:

$$\begin{aligned} a_n s_0 &+ a_{n-1}s_1 + \ldots + a_1 s_{n-1} + s_n &= 0 \\ a_n s_1 &+ a_{n-1}s_2 + \ldots + a_1 s_n + s_{n+1} &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n s_{n-1} &+ a_{n-1}s_n + \ldots + a_1 s_{2n-2} + s_{2n-1} &= 0 \end{aligned}$$

aus diesen und aus $V(x) = 0$ erhält man durch Elimination der Coefficienten $a_1, a_2 \ldots a_n$:

$$V(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots\ldots s_n \\ s_1 & s_2 \ldots\ldots s_{n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ s_{n-1} & s_n \ldots\ldots s_{2n-1} \\ 1 & x \ldots\ldots x^n \end{vmatrix} = 0.$$

Wir bemerken, dass der Werth dieser Determinante sich nicht ändert, wenn man zu den Elementen der zweiten Colonne nach der Reihe diejenigen der ersten, multiplicirt mit $-x$, hinzufügt, zu den Elementen der dritten Colonne die der zweiten, multiplicirt mit $-x$, und so fort, mithin ist:

$$V(x) = \begin{vmatrix} s_1 - s_0 x & s_2 - s_1 x \ldots\ldots s_n - s_{n-1} x \\ s_2 - s_1 x & s_3 - s_2 x \ldots\ldots s_{n+1} - s_n x \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ s_n - s_{n-1} x & s_{n+1} - s_n x \ldots\ldots s_{2n-1} - s_{2n-2} x \end{vmatrix} = 0.$$

Wir wollen diese Determinante durch:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots\ldots a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots\ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

darstellen, und mit V_r die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots\ldots a_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots\ldots a_{2,r} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{r,1} & a_{r,2} \ldots\ldots a_{r,r} \end{vmatrix}$$

bezeichnen.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Beweise des folgenden

Theorems. Die Ausdrücke, welche die Reihe:

$$V_n \ , \ V_{n-1} \ , \ V_{n-2} \ldots\ldots V_r \ldots\ldots V_1 \ , \ 1$$

bilden, besitzen die characteristische Eigenschaft der *Sturm*'schen Reste, das heisst, wenn für einen Werth von x die Function V_r verschwindet, so sind die Functionen V_{r+1}, V_{r-1} für denselben Werth von x von entgegengesetztem Zeichen.

In der That bemerken wir, dass, da:

$$V_r = \frac{dV_{r+1}}{da_{r+1,r+1}} \qquad V_{r-1} = \frac{d^2 V_{r+1}}{da_{r,r}\, da_{r+1\,r+1}}$$

ist, aus der Gleichung (14) folgt:

$$V_{r+1}\, V_{r-1} = \frac{dV_{r+1}}{da_{r,r}}\, V_r - \left(\frac{dV_{r+1}}{da_{r,r+1}}\right)^2.$$

Wenn daher V_r für einen Werth von x verschwindet, so wird für denselben Werth:

$$V_{r+1}\, V_{r-1} = -\left(\frac{dV_{r+1}}{da_{r,r+1}}\right)^2$$

das heisst, V_{r+1} und V_{r-1} sind von entgegengesetztem Zeichen.

§. 9. Von den Determinanten der Wurzeln der algebraischen Gleichungen und den Determinanten der particulären Integrale der lineären Differentialgleichungen.

Es bedeute:

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + A_1 x + A_0 = 0$$

eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades und es seien $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ die Wurzeln derselben. So werden die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^n + A_{n-1}\alpha_1^{n-1} + \ldots\ldots + A_1\alpha_1 + A_0 = 0\\
&\alpha_2^n + A_{n-1}\alpha_2^{n-1} + \ldots\ldots + A_1\alpha_2 + A_0 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_n^n + A_{n-1}\alpha_n^{n-1} + \ldots\ldots + A_1\alpha_n + A_0 = 0
\end{aligned}$$

identisch erfüllt.

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit den unbestimmten Grössen $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$, addirt die Resultate, und setzt:

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = 0\\
&a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots\ldots + a_n\alpha_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1\alpha_1^r + a_2\alpha_2^r + \ldots\ldots + a_n\alpha_n^r = z\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1\alpha_1^{n-1} + a_2\alpha_2^{n-1} + \ldots\ldots + a_n\alpha_n^{n-1} = 0
\end{aligned} \qquad (88.)$$

so kommt offenbar:

$$A_r = -\frac{1}{z}\left(a_1\alpha_1^n + a_2\alpha_2^n + \ldots\ldots + a_n\alpha_n^n\right).$$

Wenn man nun:

$$\Delta = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots\ldots \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots\ldots \alpha_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots\ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

setzt, so folgen aus den Gleichungen (88) die Gleichungen:

$$a_1 = \frac{z}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_1^r} \quad , \quad a_2 = \frac{z}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_1^r} \ldots\ldots a_n = \frac{z}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_n^r}$$

und daher, indem man die gefundenen Werthe einsetzt:

$$A_r = -\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_1^n \frac{d\Delta}{d\alpha_1^r} + \alpha_2^n \frac{d\Delta}{d\alpha_2^r} + \ldots\ldots + \alpha_n^n \frac{d\Delta}{d\alpha_n^r}\right) = \pm \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_{n-r} ,$$

wo das Zeichen Σ die Summe der Produkte der Combinationen $n-r^{\text{ter}}$ Klasse der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ bedeutet.

Wenn man $r = n-1$ annimmt und mit $F(x)$ den Ausdruck:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots\ldots (x-\alpha_n)$$

bezeichnet, so werden die Gleichungen (88) erfüllt, wenn man setzt:

$$a_1 = \frac{z}{F'(\alpha_1)} \quad , \quad a_2 = \frac{z}{F'(\alpha_2)} \quad , \quad \ldots\ldots a_n = \frac{z}{F'(\alpha_n)}$$

und daher wird:

$$\frac{1}{F'(\alpha_1)} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_1^{n-1}} \quad , \quad \frac{1}{F'(\alpha_2)} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_2^{n-1}} \quad , \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{F'(\alpha_n)} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\alpha_n^{n-1}} .$$

Wir bemerken, dass:

$$\frac{d\Delta}{d\alpha_1^{n-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots\ldots \alpha_n \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots\ldots \alpha_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \ldots\ldots \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ist. Bezeichnet man daher diese Determinante mit Δ_1 und mit $F_1(x)$ den Ausdruck:

$$(x-\alpha_2)\ (x-\alpha_3) \ldots\ldots (x-\alpha_n) ,$$

so kommt:

$$\frac{1}{F'_1(\alpha_2)} = \frac{1}{\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{d\alpha_2^{n-2}} .$$

Setzt man analog:

$$\frac{d\Delta_1}{d\alpha_2^{n-2}} = \Delta_2 \quad , \quad \frac{d\Delta_2}{d\alpha_3^{n-3}} = \Delta_3 \ldots\ldots \frac{d\Delta_{n-2}}{d\alpha_{n-1}} = \Delta_{n-1} = 1$$

und:

$$F_2(x) = (x-\alpha_3)\ldots\ldots(x-\alpha_n) \; , \; F_3(x) = (x-\alpha_4)\ldots\ldots(x-\alpha_n)\ldots\ldots F_{n-2}(x) = (x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n),$$

so erhält man:

$$\frac{1}{F_2'(\alpha_3)} = \frac{1}{\Delta_2}\frac{d\Delta_2}{d\alpha_3^{n-3}} \quad , \quad \frac{1}{F_3'(\alpha_4)} = \frac{1}{\Delta_3}\frac{d\Delta_3}{d\alpha_4^{n-4}} \ldots\ldots \frac{1}{F_{n-2}'(\alpha_{n-1})} = \frac{1}{\Delta_{n-2}},$$

diese Gleichungen liefern, Glied für Glied mit einander multiplicirt:

$$\Delta = F'(\alpha_1)\, F_1'(\alpha_2)\, F_2'(\alpha_3) \ldots\ldots F_{n-2}'(\alpha_{n-1})$$

oder auch:

$$\Delta = (\alpha_1-\alpha_2)\,(\alpha_1-\alpha_3)\ldots\ldots(\alpha_1-\alpha_n)\,(\alpha_2-\alpha_3)\ldots\ldots(\alpha_2-\alpha_n)\,(\alpha_3-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$$

eine wichtige Relation, welche wir *Vandermonde* verdanken.

Zu diesem Resultat kann man auch gelangen, indem man nur die Eigenschaften der Determinanten benutzt. In der That erhält man, wenn man an der Determinante Δ die in der Anwendung 3 des §. 5 angegebene Transformation ausführt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_2-\alpha_3 & \ldots\ldots & \alpha_{n-1}-\alpha_n \\ \alpha_1^2-\alpha_2^2 & \alpha_2^2-\alpha_3^2 & \ldots\ldots & \alpha_{n-1}^2-\alpha_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \alpha_1^{n-1}-\alpha_2^{n-1} & \alpha_2^{n-1}-\alpha_3^{n-1} & \ldots\ldots & \alpha_{n-1}^{n-1}-\alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

wenn man nun die erste Colonne durch $\alpha_1-\alpha_2$, die zweite durch $\alpha_2-\alpha_3$ u. s. w. dividirt, so kommt:

$$\Delta = (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)\ldots\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \alpha_1+\alpha_2 & \ldots\ldots & \alpha_{n-1}+\alpha_n \\ \ldots\ldots & & \\ \alpha_1^{n-2}+\alpha_1^{n-3}\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_2^{n-2} & \ldots\ldots & \alpha_{n-1}^{n-2}+\alpha_{n-1}^{n-3}\alpha_n+\ldots\ldots+\alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

und führt man nun wieder an dieser letzten Determinante die oben genannte Transformation aus und dividirt dann die erste Colonne mit $\alpha_1-\alpha_3$, die zweite mit $\alpha_2-\alpha_4$, u. s. w., so erhält man:

$$\Delta = (\alpha_1-\alpha_2)\ldots\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots\ldots(\alpha_{n-2}-\alpha_n) \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \\ \alpha_1^{n-3}+\alpha_1^{n-2}\alpha_3+\ldots\ldots+\alpha_2(\alpha_1^{n-4}+\ldots\ldots)+\ldots\ldots & \end{vmatrix}$$

und wiederholt man diese Operation $(n-1)$ mal, so kommt man zu dem oben gefundenen Werthe von Δ.

Aus demselben schliesst man leicht, dass die Werthe von x_1, x_2 ..... x_n, welche den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots\dots\dots + x_n &= 1 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots\dots\dots + \alpha_n x_n &= k \\ \alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \dots\dots\dots + \alpha_n^2 x_n &= k^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1^{n-1} x_1 + \alpha_2^{n-1} x_2 + \dots\dots\dots + \alpha_n^{n-1} x_n &= k^{n-1} \end{aligned}$$

fliessen, sich unter die Form:

$$(89.)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{(\alpha_2 - k)\ (\alpha_3 - k)\ \dots\dots\ (\alpha_n - k)}{(\alpha_2 - \alpha_1)\ (\alpha_3 - \alpha_1)\ \dots\dots\ (\alpha_n - \alpha_1)} \\ x_2 &= \frac{(\alpha_1 - k)\ (\alpha_3 - k)\ \dots\dots\ (\alpha_n - k)}{(\alpha_1 - \alpha_2)\ (\alpha_3 - \alpha_2)\ \dots\dots\ (\alpha_n - \alpha_2)} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \frac{(\alpha_1 - k)\ (\alpha_2 - k)\ \dots\dots\ (\alpha_{n-1} - k)}{(\alpha_1 - \alpha_n)\ (\alpha_2 - \alpha_n)\ \dots\dots\ (\alpha_{n-1} - \alpha_n)} \end{aligned}$$

bringen lassen.

Bezeichnet man mit s_r die Summe der r^{ten} Potenzen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung, und bildet das Quadrat der Determinante Δ, so erhält man:

$$\Delta^2 = H = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots\dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots\dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots\dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

und da nach (62):

$${}^{(n-m)}H_{r,r} = ({}^{(n-m)}\Delta_{r,1})^2 + ({}^{(n-m)}\Delta_{r,2})^2 + \dots + ({}^{(n-m)}\Delta_{r,n})^2$$

ist, so erhält man mit Rücksicht auf:

$${}^{(n-m)}\Delta_{u,u} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots\dots & \alpha_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \dots\dots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix} \qquad {}^{(n-m)}H_{u,u} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots\dots & s_{m-1} \\ s_1 & s & \dots\dots & s_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_m & \dots\dots & s_{2m-2} \end{vmatrix}$$

die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots\ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots\ldots & s_m \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ s_{m-1} & s_m & \ldots\ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix} = \Sigma \{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \ldots\ldots (\alpha_1 - \alpha_m)(\alpha_2 - \alpha_3) \ldots\ldots (\alpha_{m-1} - \alpha_m)\}^2$$

Anwendungen.

1. Eine Determinante, in welcher die Elemente, welche eine Reihe oder eine Colonne bilden, bestimmte, zwischen denselben Grenzen genommene, Integrale sind, lässt sich auf ein vielfaches Integral zurückführen. In einigen Fällen kann diese Transformation oder die reciproke, wenn sie sich ausführen lässt, bei der Untersuchung des Werthes der Determinante oder des vielfachen Integrales nützlich sein. Um zu zeigen, wie man diese Transformation bewirken kann, betrachten wir die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-x_1}}{\varphi_1(x_1)} dx_1 & \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-x_2}}{\varphi_2(x_2)} dx_2 \ldots\ldots & \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-x_n}}{\varphi_n(x_n)} dx_n \\ \int_{a_2}^{a_3} \frac{e^{-x_1} x_1}{\varphi_1(x_1)} dx_1 & \int_{a_2}^{a_3} \frac{e^{-x_2} x_2}{\varphi_2(x_2)} dx_2 \ldots\ldots & \int_{a_2}^{a_3} \frac{e^{-x_n} x_n}{\varphi_n(x_n)} dx_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int_{a_n}^{\infty} \frac{e^{-x_1} x_1^{n-1}}{\varphi_1(x_1)} dx_1 & \int_{a_n}^{\infty} \frac{e^{-x_2} x_2^{n-1}}{\varphi_2(x_2)} dx_2 \ldots\ldots & \int_{a_n}^{\infty} \frac{e^{-x_n} x_n^{n-1}}{\varphi_n(x_n)} dx_n \end{vmatrix}$$

und bemerken, dass jeder Term der Entwicklung derselben ein bestimmtes vielfaches Integral der n^{ten} Ordnung sein wird, folglich wird man diese Determinante unter die Form:

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \ldots\ldots \int_{a_n}^{\infty} dx_n \begin{vmatrix} \frac{e^{-x_1}}{\varphi_1(x_1)} & \frac{e^{-x_2}}{\varphi_2(x_2)} & \ldots\ldots & \frac{e^{-x_n}}{\varphi_n(x_n)} \\ \frac{e^{-x_1} x_1}{\varphi_1(x_1)} & \frac{e^{-x_2} x_2}{\varphi_2(x_2)} & \ldots\ldots & \frac{e^{-x_n} x_n}{\varphi_n(x_n)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{e^{-x_1} x_1^{n-1}}{\varphi_1(x_1)} & \frac{e^{-x_2} x_2^{n-1}}{\varphi_2(x_2)} & \ldots\ldots & \frac{e^{-x_n} x_n^{n-1}}{\varphi_n(x_n)} \end{vmatrix}$$

bringen können; dieselbe Determinante wird mithin auch gleich sein dem vielfachen Integral:

$$\int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_2}^{a_3} dx_2 \ldots\ldots \int_{a_n}^{\infty} dx_n \; \frac{e^{-x_1-x_2-\ldots\ldots-x_n}}{\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,\ldots\ldots\,\varphi_n(x_n)}\,\Delta$$

wo:

$$\Delta = (x_1-x_2)\,(x_1-x_3)\,\ldots\ldots\,(x_1-x_n)\,(x_2-x_3)\,\ldots\ldots\,(x_{n-1}-x_n).$$

Mittelst einer dieser Transformationen und eines Theorems über die particulären Integrale der lineären Differentialgleichungen, das wir Herrn *Liouville* verdanken und im Folgenden beweisen werden, ist es neuerlich Herrn *Tissot**) gelungen, einige Resultate von *Abel* und von *Roberts***) zu verallgemeinern. Die Determinanten von bestimmten Integralen waren übrigens schon von Herrn *Catalan****) betrachtet worden.

2. Die homogene Function von ungerader Ordnung mit zwei Variabeln:

$$a_1x^{2n+1}+(2n+1)a_2x^{2n}y+\frac{(2n+1)2n}{2}\,a_3x^{2n-1}y^2+\ldots\ldots+(2n+1)a_{2n+1}xy^{2n}+a_{2n+2}y^{2n+1}$$

heisst auf die *canonische* Form gebracht, wenn sie in:

$$(p_1x+q_1y)^{2n+1}+(p_2x+q_2y)^{2n+1}+\ldots\ldots+(p_{n+1}x+q_{n+1}y)^{2n+1}$$

transformirt ist.

Die $2(n+1)$ Unbekannten $p_1,\ p_2\ldots\ldots\ p_{n+1};\ q_1,\ q_2\ldots\ldots\ q_{n+1}$ werden vermittelst der $2(n+1)$ Gleichungen bestimmt, welche man erhält, indem man die Coefficienten derselben Potenzen von x in beiden Ausdrücken einander gleich setzt. Setzt man nun $q_1=p_1\alpha_1,\ q_2=p_2\alpha_2\ldots q_{n+1}=p_{n+1}\alpha_{n+1}$ und $p_r^{2n+1}=c_r$, so werden diese $2(n+1)$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
c_1+c_2+\ldots\ldots+c_{n+1}&=a_1\\
c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\ldots\ldots+c_{n+1}\alpha_{n+1}&=a_2\\
c_1\alpha_1^2+c_2\alpha_2^2+\ldots\ldots+c_{n+1}\alpha_{n+1}^2&=a_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_1\alpha_1^{2n+1}+c_2\alpha_2^{2n+1}+\ldots\ldots+c_{n+1}\alpha_{n+1}^{2n+1}&=a_{2n+2}.
\end{aligned}$$

Wenn man aus den ersten $n+1$ Gleichungen dieses Systems die Werthe von $c_1,\ c_2\ldots\ldots\ c_{n+1}$ bestimmt, so erhält man $n+1$ Gleichungen, welche der folgenden analog sind:

$$(90.)\qquad c_r=a_1\frac{d\Delta}{d\alpha_r^0}+a_2\frac{d\Delta}{d\alpha_r'}+\ldots\ldots+a_{n+1}\frac{d\Delta}{d\alpha_r^n}$$

wo:

---

*) Journal de Liouville, Année 1852.

**) Abel. Oeuvres complètes, pag. 93, Tome 1. Journal de Liouville. 1851, 1852.

***) Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles. 1841.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

ist; und substituirt man diese Werthe in die $(n+2)^{\text{te}}$ Gleichung, so wird man:

$$a_{n+2} - a_{n+1}\Sigma\alpha_1 + a_n\Sigma\alpha_1\alpha_2 \ldots \pm a_1\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n+1} = 0$$

erhalten, indem man sich erinnert, dass:

$$\alpha_1^{n+1}\frac{d\Delta}{d\alpha_1^s} + \alpha_2^{n+1}\frac{d\Delta}{d\alpha_2^s} + \ldots + \alpha_{n+1}^{n+1}\frac{d\Delta}{d\alpha_{n+1}^s} = \pm\Delta\Sigma\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-s+1}.$$

Analog erhält man durch Elimination von $c_1\alpha_1$, $c_2\alpha_2 \ldots c_{n+1}\alpha_{n+1}$ aus der 2ten, $3^{\text{ten}} \ldots (n+3)^{\text{ten}}$ dieser Gleichungen:

$$a_{n+3} - a_{n+2}\Sigma\alpha_1 + a_{n+1}\Sigma\alpha_1\alpha_2 \ldots \pm a_2\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n+1} = 0$$

Fährt man fort, in dieser Weise zu operiren, so wird man offenbar die folgenden $n+1$ Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1}m_1 + a_n m_2 \ldots \pm a_1 m_{n+1} &= 0 \\ a_{n+3} - a_{n+2}m_1 + a_{n+1}m_2 \ldots \pm a_2 m_{n+1} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\

$$\begin{vmatrix} a_1x - a_2 & a_2x - a_3 & \ldots\ldots & a_{n+1}x - a_{n+2} \\ a_2x - a_3 & a_3x - a_4 & \ldots\ldots & a_{n+2}x - a_{n+3} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n+1}x - a_{n+2} & a_{n+2}x - a_{n+3} & \ldots\ldots & a_{2n+1}x - a_{2n+2} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir wollen die lineäre Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$y^{(n)} + A_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_1y' + A_0y = 0$$

betrachten, in welcher A_{n-1}, A_{n-2} ..... A_0 Functionen der Variabelen sein sollen, in Bezug auf welche die Differentialquotienten genommen sind. Es seien y_1, y_2 ..... y_n n particuläre Integrale dieser Gleichung, und man setze:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots\ldots + a_ny_n = 0$$
$$a_1y_1' + a_2y_2' + \ldots\ldots + a_ny_n' = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1y_1^{(r)} + a_2y_2^{(r)} + \ldots\ldots + a_ny_n^{(r)} = z$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1y_1^{(n-1)} + a_2y_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_ny_n^{(n-1)} = 0$$

so ist:

$$A_r = -\frac{1}{z}\left(a_1y_1^{(n)} + a_2y_2^{(n)} + \ldots\ldots + a_ny_n^{(n)}\right)$$

wenn man nun aus den obigen Gleichungen die Werthe von a_1, a_2 ..... a_n bestimmt, und in diese letzte substituirt, so erhält man:

$$A_r = -\frac{1}{\Delta}\left(y_1^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_1^{(r)}} + y_2^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_2^{(r)}} + \ldots\ldots + y_n^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_n^{(r)}}\right)$$

wo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ist. Man bemerkt, dass aus der Differentiation dieser letzten Gleichung folgt:

$$(93.) \qquad \Delta' = y_1^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} + y_2^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} + \ldots\ldots + y_n^{(n)}\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}$$

daher wird sein:

$$A_{n-1} = -\frac{\Delta'}{\Delta}$$

woraus folgt:

$$\Delta = Ce^{-\int A_{n-1}dx}$$

eine Formel, die von Herrn *Liouville* herrührt.

Mittelst der Gleichung (93) erhält man leicht die folgenden:

$$\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-2)}} = -\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)', \quad \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-2)}} = -\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)' \ldots\ldots \quad \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-2)}} = -\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)'$$

und daher:

$$-\Delta = y_1^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)' + y_2^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)' + \ldots\ldots + y_n^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)'$$

$$-\Delta' = y_1^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)'' + y_2^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)'' + \ldots\ldots + y_n^{(n-2)}\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)''$$

$$0 = y_1^{(n-r)}\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)' + y_2^{(n-r)}\left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)' + \ldots\ldots + y_n^{(n-r)}\left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)'$$

wo in der letzten dieser Gleichungen r die Werthe 3, 4 ..... n annehmen kann. Nimmt man $\Delta = 0$ an, so hat man also $n-1$ Gleichungen, aus denen die Verhältnisse:

$$\left(\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}}\right)' : \left(\frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}}\right)' : \ldots\ldots : \left(\frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}\right)' = \frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} : \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} : \ldots\ldots : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}$$

fliessen, und daher:

$$\frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} : \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} : \ldots\ldots : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}} = \alpha_1 : \alpha_2 : \ldots\ldots : \alpha_n$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ Constanten sind. Diese Werthe, in die identische Gleichung:

$$y_1 \frac{d\Delta}{dy_1^{(n-1)}} + y_2 \frac{d\Delta}{dy_2^{(n-1)}} + \ldots\ldots + y_n \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}} = 0$$

substituirt, geben:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots\ldots + \alpha_n y_n = 0.$$

Aus der Gleichung (93) erhalten wir auch die folgenden:

$$\left(\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-2)}}\right)' = -\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-3)}} + \frac{d\Delta}{dy_r^{(n-2)}}, \quad \left(\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-3)}}\right)' = -\frac{d\Delta}{dy_r^{(n-4)}} + \frac{d\Delta}{dy_r^{(n-3)}} \ldots\ldots \left(\frac{d\Delta}{dy_r}\right)' = \frac{d\Delta'}{dy_r}.$$

Indem man die vorletzte Gleichung einmal differentiirt, die drittletzte zweimal und sofort, gelangt man zu der Gleichung:

$$\left(\frac{d\Delta}{dy_r^{(s)}}\right)^{(s+1)} = (-1)^s \left\{\frac{d\Delta'}{dy_r} - \left(\frac{d\Delta'}{dy_r'}\right)' + \left(\frac{d\Delta'}{dy_r''}\right)'' \ldots\ldots \pm \left(\frac{d\Delta'}{dy_r^{(s)}}\right)^{(s)}\right\}$$

Anwendungen.

1. Die Gleichung:

$$\Delta = Ce^{-\int A_{n-1} dx}$$

kann in der Form:

$$y_n^{(n-1)} \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}} + y_n^{(n-2)} \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-2)}} + \ldots\ldots + y_n \frac{d\Delta}{dy_n} = Ce^{-\int A_{n-1} dx}$$

geschrieben werden, ebenso wird, wenn man setzt:

$$B_r = \frac{d\Delta}{dy_n^{(r)}} : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}$$

sein:

$$(94.) \qquad y_n^{(n-1)} + B_{n-2} y_n^{(n-2)} + \ldots\ldots + B_0 y_n = Ce^{-\int A_{n-1} dx} : \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}} .$$

Wir bemerken, dass nach den bewiesenen Relationen zwischen den Coefficienten einer lineären Differentialgleichung und den particulären Integralen derselben, die Ausdrücke y_1, y_2 ..... y_{n-1} particuläre Integrale der Gleichung:

$$y_n^{(n-1)} + B_{n-2} y_n^{(n-2)} + \ldots\ldots + B_1 y_n' + B_0 y_n = 0$$

sind, und daher wird nach einer bekannten Eigenschaft der lineären Differentialgleichungen das vollständige Integral der Gleichung (94) sein:

$$y_n = y_1 \alpha_1 + y_2 \alpha_2 + \ldots\ldots + y_{n-1} \alpha_{n-1}$$

wo:

$$\alpha_r = C \int \frac{1}{\Delta_1} \frac{d\Delta_1}{dy_r^{(n-2)}} e^{-\int A_{n-1} dx} dx \quad , \quad \Delta_1 = \frac{d\Delta}{dy_n^{(n-1)}}$$

ist.

Kennt man daher $n-1$ particuläre Integrale einer lineären Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, so kann man das n^{te} als Function der $n-1$ anderen bestimmen. Dieses wichtige Theorem rührt von Herrn *Malmstén* *) her.

2. Bezeichnet man mit x, y, z die Coordinaten eines Punktes einer doppelt gekrümmten Linie, mit r, ϱ die Radien der Krümmung und der Torsion, und setzt zur Abkürzung:

$$m^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \\ x^{IV} & y^{IV} & z^{IV} \end{vmatrix}$$

so ist:

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{1}{m^3} \left(x' \frac{d\Delta}{dx^{IV}} + y' \frac{d\Delta}{dx^{IV}} + z' \frac{d\Delta}{dz^{IV}} \right)$$

vorausgesetzt, dass die Differentialquotienten nach dem Bogen genommen sind. Um die Linie zu bestimmen, für welche das Verhältniss $\frac{r}{\varrho}$ constant ist, differentiiren wir diese letzte Gleichung und erhalten:

*) *Crelle* Journal für die Mathematik, Band 39.

$$(95.) \qquad m\left(x'\frac{d\Delta}{dx'''}+y'\frac{d\Delta}{dy'''}+z'\frac{d\Delta}{dz'''}\right)+3m'\left(x'\frac{d\Delta}{dx^{\mathrm{IV}}}+y'\frac{d\Delta}{dy^{\mathrm{IV}}}+z'\frac{d\Delta}{dz^{\mathrm{IV}}}\right)=0.$$

Nun folgen aber aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x'\,x''+y'\,y''+z'\,z'' &= 0\\ x'\,x'''+y'\,y'''+z'\,z''' &= -m^2\\ x'\,x^{\mathrm{IV}}+y'\,y^{\mathrm{IV}}+z'\,z^{\mathrm{IV}} &= -3mm' \end{aligned}$$

die Gleichungen:

$$\Delta x'=-m\left(m\frac{d\Delta}{dx'''}+3m'\frac{d\Delta}{dx^{\mathrm{IV}}}\right),\quad \Delta y'=-m\left(m\frac{d\Delta}{dy'''}+3m'\frac{d\Delta}{dy^{\mathrm{IV}}}\right),\quad \Delta z'=-m\left(\frac{d\Delta}{dz'''}+3m'\frac{d\Delta}{dz^{\mathrm{IV}}}\right)$$

welche, nach der Reihe in x', y', z' multiplicirt und addirt, nach (95), geben:

$$\Delta = 0,$$

und daher:

$$ax'+by'+cz' = k$$

wo a, b, c, k constante Grössen sind. Die verlangte Linie wird daher eine Schraubenlinie, welche auf einem Cylinder gezogen ist, dessen Generatrices einer bestimmten Geraden parallel sind. *)

§. 10. Von den Functionaldeterminanten.

Es mögen y_1, y_2 ..... y_n n von einander unabhängige Functionen der Variabeln x_1, x_2 ..... x_n darstellen; bildet man die ersten partiellen Differentialquotienten dieser Functionen nach jeder der Variabelen, so erhält man n^2 Grössen, die analog mit $\frac{dy_r}{dx_s} = y_r'(x_s)$ sind. Die Determinante:

$$P=\begin{vmatrix} y_1'(x_1)\,y_1'(x_2)\,\ldots\,y_1'(x_n)\\ y_2'(x_1)\,y_2'(x_2)\,\ldots\,y_2'(x_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n'(x_1)\,y_n'(x_2)\,\ldots\,y_n'(x_n) \end{vmatrix} = \Sigma\left(\pm\, y_1'(x_1)\,y_2'(x_2)\,\ldots\,y_n'(x_n)\right)$$

heisst ***Functionaldeterminante***, oder Determinante aus den ersten partiellen Differentialquotienten der Functionen y_1, y_2 ..... y_n nach den Variabelen x_1, x_2 ..... x_n.

---

*) *Monge* Application de l'Analyse à la Géométrie. Cinquième édition, Note 1.

Die Ordnung der Functionaldeterminante ist gleich der Anzahl der Functionen, und wird nur dann niedriger, wenn einige der Functionen den Variabelen gleich sind. Zum Beispiel wenn:

$$y_{r+1} = x_{r+1} \quad , \quad y_{r+2} = x_{r+2} \; \ldots\ldots \; y_n = x_n$$

wäre, so würde die Determinante sich auf:

$$\Sigma(\pm y_1'(x_1)\, y_2'(x_2) \; \ldots\ldots \; y_r'(x_r))$$

reduciren und also von der r^{ten} Ordnung sein.

Wenn man aus den Gleichungen:

$$y_1(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = y_1 \quad , \quad y_2(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = y_2 \ldots\ldots y_n(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = y_n$$

die Werthe von $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ bestimmt und diese Werthe in dieselben Gleichungen substituirt, so erhält man mittelst Differentiation die folgenden:

$$\begin{aligned} y_r'(x_1)x_1'(y_r) + y_r'(x_2)x_2'(y_r) + \ldots\ldots + y_r'(x_n)x_n'(y_r) &= 1 \\ y_r'(x_1)x_1'(y_s) + y_r'(x_2)x_2'(y_s) + \ldots\ldots + y_r'(x_n)x_n'(y_s) &= 0 \end{aligned} \tag{96.}$$

und wenn man in den für x_r gefundenenen Werth für $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$ ihre Werthe substituirt, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1'(x_r)x_r'(y_1) + y_2'(x_r)x_r'(y_2) + \ldots\ldots + y_n'(x_r)x_r'(y_n) &= 1 \\ y_1'(x_s)x_r'(y_1) + y_2'(x_s)x_r'(y_2) + \ldots\ldots + y_n'(x_s)x_r'(y_n) &= 0 \end{aligned} \tag{97.}$$

Bezeichnet man daher mit Q die Determinante:

$$\Sigma(\pm x_1'(y_1)x_2'(y_2) \ldots\ldots x_n'(y_n))$$

so wird man nach der bekannten Regel für die Multiplication der Determinanten:

$$PQ = 1$$

erhalten.

Wenn man in der zweiten der Gleichungen (96) $s = 1, 2 \ldots\ldots n$ setzt, so erhält man n Gleichungen, aus denen folgt:

$$Qy_r'(x_s) = \frac{dQ}{dx_s'(y_r)} \tag{98.}$$

und analog folgt aus (97):

$$Px_r'(y_s) = \frac{dP}{dy_s'(x_r)} = \alpha_{s,r} \tag{99.}$$

und daher:

$$x_r'(y_s)y_r'(x_s) = \frac{dP}{dy_s'(x_r)} \frac{dQ}{dx_s'(y_r)}$$

Bezeichnen wir mit S die Determinante mit reciproken Elementen der Determinante P, so folgt, mit Rücksicht darauf, dass die Gleichung (48) für $i = 0$, $r = s$ und $r + c = n + 1$ liefert:

$$S_{n+1,n+1} = P_{n,n}P^{r-2}$$

oder:

$$\Sigma(\pm y_r'(x_r)y'_{r+1}(x_{r+1}) \ldots\ldots y_n'(x_n))P^{r-2} = \Sigma(\pm \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} \ldots\ldots \alpha_{r-1,r-1}),$$

aus der Gleichung (99):

$$\Sigma(\pm y_r'(x_r)y'_{r+1}(x_{r+1}) \ldots\ldots y_n'(x_n)) = P\Sigma(\pm x_1'(y_1)x_2'(y_2) \ldots\ldots x'_{r-1}(y_{r-1}))$$

und analog:

$$\Sigma(\pm x_r'(y_r)x'_{r+1}(y_{r+1}) \ldots\ldots x_n'(y_n)) = Q\Sigma(\pm y_1'(x_1)y_2'(x_2) \ldots\ldots y'_{r-1}(x_{r-1}))$$

Wenn man die Determinante Q nach y_s differentiirt, so kommt:

$$\frac{dQ}{dy_s} = \Sigma_r\Sigma_m \frac{dQ}{dx_r'(y_m)} \frac{d^2x_r}{dy_m dy_s}$$

oder nach Gleichung (98):

$$\frac{dQ}{dy_s} = Q\Sigma_r\Sigma_m \frac{d^2x_r}{dy_m dy_s} y'_m(x_r)$$

oder auch:

$$(100.) \qquad \frac{dQ}{dy_s} = Q\Sigma_r \frac{dx_r'(y_s)}{dx_r}$$

und da $PQ = 1$ ist, so kommt:

$$\frac{dP}{dy_s} + P\Sigma_r \frac{dx_r'(y_s)}{dx_r} = 0.$$

Aber:

$$\frac{dP}{dy_s} = \Sigma_r \frac{dP}{dx_r} x_r'(y_s)$$

durch Substitution erhält man daher:

$$\Sigma_r \frac{dPx_r'(y_s)}{dx_r} = 0$$

eine Gleichung, die nach (99):

$$(101.) \qquad \frac{d\alpha'_{s,1}}{dx_1} + \frac{d\alpha_{s,2}}{dx_2} + \ldots\ldots + \frac{d\alpha_{s,n}}{dx_n} = 0$$

geschrieben werden kann.

Wir bemerken, dass, da:

$$P = \alpha_{s,1}y_s'(x_1) + \alpha_{s,2}y_s'(x_2) + \ldots\ldots + \alpha_{s,n}y_s'(x_n)$$

ist, auch nach obiger Gleichung:

$$P = \frac{d\alpha_{s,1}y_s}{dx_1} + \frac{d\alpha_{s,2}y_s}{dx_2} + \ldots\ldots + \frac{d\alpha_{s,n}y_s}{dx_n}$$

ist.

Wir wollen annehmen, dass zwischen den Variabelen $x_1, x_2 \ldots x_n$ und den Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$ die Gleichungen:

$$\varphi_1 = 0 \quad , \quad \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_n = 0$$

bestehen. Wenn man aus diesen die Werthe von $y_1, y_2 \ldots y_n$ bestimmt, und die erhaltenen Werthe in dieselben Gleichungen substituirt, so werden diese offenbar erfüllt werden, und man wird daher:

$$\frac{d\varphi_r}{dy_1} y_1'(x_r) + \frac{d\varphi_r}{dy_2} y_2'(x_r) + \ldots + \frac{d\varphi_r}{dy_n} y_n'(x_r) = -\frac{d\varphi_r}{dx_r}$$

erhalten, und daher wird nach der Multiplicationsregel sein:

$$(102.) \qquad P\Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2} \ldots \frac{d\varphi_n}{dy_n}\right) = (-1)^n \Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dx_2} \ldots \frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)$$

Anwendung.

Es mögen $A_1, A_2 \ldots A_n$ nFunctionen der Variabelen $x_1, x_2 \ldots x_n$ bedeuten, und es möge die lineäre partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(103.) \qquad A_1 y_r'(x_1) + A_2 y_r'(x_2) + \ldots + A_n y_r'(x_n) = 0$$

betrachtet werden.

Es seien $y_1, y_2 \ldots y_{r-1}, y_{r+1} \ldots y_n$, $n-1$ von einander unabhängige Lösungen dieser Gleichung, so wird man mittelst Substitution $n-1$ identische Gleichungen erhalten, aus denen sich die Verhältnisse:

$$A_1 : A_2 : \ldots : A_n = \alpha_{r,1} : \alpha_{r,2} : \ldots : \alpha_{r,n}$$

ergeben.

Bezeichnet man mit M den gemeinsamen Werth dieser Verhältnisse, so wird offenbar:

$$P = M\left(A_1 y_r'(x_1) + A_2 y_r'(x_2) + \ldots + A_n y_r'(x_n)\right)$$

sein, und nach der Gleichung (101) wird man:

$$(104.) \qquad \frac{dMA_1}{dx_1} + \frac{dMA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMA_n}{dx_n} = 0$$

haben.

Die Grösse M, für welche die beiden in diesen beiden letzten Gleichungen ausgedrückten Eigenschaften stattfinden, ist von *Jacobi* *) der *Multiplicator* der partiellen Differentialgleichung (103), oder des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

*) Mathematische Werke, Band I.

$$(105.) \qquad x_1' : x_2' : \ldots : x_n' = A_1 : A_2 : \ldots : A_n$$

genannt worden.

Nehmen wir nun an, dass:

$$(106.) \qquad \begin{aligned} B_1 &= A_1 y_1'(x_1) + A_2 y_1'(x_2) + \ldots + A_n y_1'(x_n) \\ B_2 &= A_1 y_2'(x_1) + A_2 y_2'(x_2) + \ldots + A_n y_2'(x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_n &= A_1 y_n'(x_1) + A_2 y_n'(x_2) + \ldots + A_n y_n'(x_n) \end{aligned}$$

seien, in welchen B_1, B_2 ..... B_n Functionen von y_1, y_2 ..... y_n sind. Differentiirt man diese Gleichungen nach der Reihe nach y_1, y_2 ..... y_n, addirt die Resultate und erinnert sich, dass:

$$\Sigma_r \frac{dy_r'(x_s)}{dy_r} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dx_s}$$

ist, so erhält man:

$$\Sigma_r \frac{dB_r}{dy_r} = \frac{1}{P}\left(A_1\frac{dP}{dx_1} + A_2\frac{dP}{dx_2} + \ldots + A_n\frac{dP}{dx_n}\right) + \frac{dA_1}{dx_1} + \frac{dA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dA_n}{dx_n}$$

und da, für $PQ = 1$:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dx_r} = -\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx_r}$$

ist, so folgt:

$$Q\Sigma_r \frac{dB_r}{dy_r} = -\left(A_1\frac{dQ}{dx_1} + A_2\frac{dQ}{dx_2} + \ldots + A_n\frac{dQ}{dx_n}\right) + Q\left(\frac{dA_1}{dx_1} + \frac{dA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dA_n}{dx_n}\right)$$

Nun ist aber nach den Gleichungen (106) für jedes beliebige M:

$$B_1\frac{dMQ}{dy_1} + B_2\frac{dMQ}{dy_2} + \ldots + B_n\frac{dMQ}{dy_n} = A_1\frac{dMQ}{dx_1} + A_2\frac{dMQ}{dx_2} + \ldots + A_n\frac{dMQ}{dx_n}$$

multiplicirt man daher die vorletzte Gleichung mit M und addirt sie zu dieser letzten Glied für Glied, so erhält man:

$$(107.) \qquad \frac{dMQB_1}{dy_1} + \frac{dMQB_2}{dy_2} + \ldots + \frac{dMQB_n}{dy_n} = Q\left(\frac{dMA_1}{dx_1} + \frac{dMA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMA_n}{dx_n}\right)$$

Wir bemerken, dass, wegen:

$$y_r' = y_r'(x_1)x_1' + y_r'(x_2)x_2' + \ldots + y_r'(x_n)x_n'$$

aus dem System der Gleichungen (105) das gleichbedeutende System:

$$y_1' : y_2' : \ldots : y_n' = B_1 : B_2 : \ldots B_n$$

folgt.

Wenn:

$$y_1 = a_1 \ , \ y_2 = a_2 \ , \ldots y_{n-2} = a_{n-2}$$

$n-2$ Integrale des Systems (105) sind, so sind B_1, B_2 ..... B_{n-2} identisch Null; und aus der Gleichung (107) folgt:

$$\frac{dMQB_{n-1}}{dy_{n-1}} + \frac{dMQB_n}{dy_n} = Q\left(\frac{dMA_1}{dx_1} + \frac{dMA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMA_n}{dx_n}\right).$$

Nehmen wir an, dass der Multiplicator M in der Weise bestimmt sei, dass er:

$$\frac{dMA_1}{dx_1} + \frac{dMA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMA_n}{dx_n} = 0 \tag{108.}$$

macht, so wird man für diesen Werth von M:

$$\frac{dMQB_{n-1}}{dy_{n-1}} + \frac{dMQB_n}{dy_n} = 0$$

erhalten, das heisst, MQ wird, wie bekannt ist, der passende Multiplicator für die Integration der Gleichung:

$$B_n y'_{n-1} - B_{n-1} y'_n = 0$$

sein, und daher wird:

$$\int MQ(B_n y'_{n-1} - B_{n-1} y'_n) = \text{const.}$$

das letzte Integral der Gleichungen (105) sein.

Hieraus folgt, dass, wenn man $n-2$ Integrale der $n-1$ Gleichungen (105) kennt, so wie einen Werth von M, der die Gleichung (108) erfüllt, das letzte Integral derselben Gleichungen von einer Quadratur abhängt. Diese von *Jacobi* gefundene Eigenschaft nennt derselbe: ***das Princip des letzten Multiplicators.***

Wir wollen nun sehen, wie man den Werth von M in dem System von Gleichungen, die den Problemen der Mechanik entsprechen, bestimmen kann.

Bezeichnet T die halbe Summe der lebendigen Kräfte, U die Kräftefunction, so kann man bekanntlich die Gleichungen der Mechanik in die Form:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{d(T-U)}{dp_r} \quad , \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{d(T-U)}{dq_r}$$

bringen, wo $r = 1, 2 \ldots n$ zu setzen ist. Setzt man:

$$\frac{d(T-U)}{dp_r} = P_r \qquad \frac{d(U-T)}{dq_r} = Q_r$$

so sind diese Gleichungen gleichbedeutend mit:

$$t' : q_1' : q_2' : \ldots : q_n' : p_1' : p_2' : \ldots : p_n' = 1 : P_1 : P_2 : \ldots : P_n : Q_1 : Q_2 : \ldots : Q_n.$$

Daher wird die mit (108) analoge Gleichung, durch welche der, diesem System von Gleichungen entsprechende Multiplicator M bestimmt wird, sein:

$$\frac{dM}{dt} + \frac{dMP_1}{dq_1} + \ldots\ldots + \frac{dMP_n}{dq_n} + \frac{dMQ_1}{dp_1} + \ldots\ldots + \frac{dMQ_n}{dp_n} = 0$$

welche, da offenbar:

$$\frac{dP_r}{dq_r} + \frac{dQ_r}{dp_r} = 0$$

ist, übergeht in:

$$\frac{dM}{dt} + P_1\frac{dM}{dq_1} + \ldots\ldots + P_n\frac{dM}{dq_n} + Q_1\frac{dM}{dp_1} + \ldots\ldots + Q_n\frac{dM}{dp_n} = 0.$$

Da diese Gleichung erfüllt wird, wenn wir M constant, oder der grösseren Einfachheit wegen $M = 1$ setzen, so folgt, dass der Multiplicator für die in die obige Form gebrachten Gleichungen der Mechanik Eins ist.

Multiplicirt man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&y_1'(x_1)u_1 + y_1'(x_2)u_2 + \ldots\ldots + y_1'(x_n)u_n = v_1\\
&y_2'(x_1)u_1 + y_2'(x_2)u_2 + \ldots\ldots + y_2'(x_n)u_n = v_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n'(x_1)u_1 + y_n'(x_2)u_2 + \ldots\ldots + y_n'(x_n)u_n = v_n
\end{aligned}$$

der Reihe nach mit $x_r'(y_1)$, $x_r'(y_2)$ ..... $x_r'(y_n)$, so kommt nach den Gleichungen (97):

$$u_r = v_1x_r'(y_1) + v_2x_r'(y_2) + \ldots\ldots + v_nx_r'(y_n)$$

und multiplicirt man analog die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&y_1'(x_1)u_1 + y_2'(x_1)u_2 + \ldots\ldots + y_n'(x_1)u_n = v_1\\
&y_1'(x_2)u_1 + y_2'(x_2)u_2 + \ldots\ldots + y_n'(x_2)u_n = v_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_1'(x_n)u_1 + y_2'(x_n)u_2 + \ldots\ldots + y_n'(x_n)u_n = v_n
\end{aligned}$$

mit $x_1'(y_r)$, $x_2'(y_r)$ ..... $x_n'(y_r)$, so kommt nach (96):

$$u_r = v_1x_1'(y_r) + v_2x_2'(y_r) + \ldots\ldots + v_nx_n'(y_r)$$

Wir setzen:

$$\text{(109.)}\qquad \begin{aligned}
&y_r'(x_1)y_s'(x_1) + y_r'(x_2)y_s'(x_2) + \ldots\ldots + y_r'(x_n)y_s'(x_n) = A_{r,s} = A_{s,r}\\
&x_1'(y_r)x_1'(y_s) + x_2'(y_r)x_2'(y_s) + \ldots\ldots + x_n'(y_r)x_n'(y_s) = E_{r,s} = E_{s,r}
\end{aligned}$$

substituiren in diese letzte Gleichung 1, 2, 3 ..... n anstatt s, und erhalten n Gleichungen, aus denen sich, nach dem, was oben bewiesen ist, die folgenden Werthe von $x_1'(y_r)$, $x_2'(y_r)$ .... $x_n'(y_r)$ ergeben:

$$x_1'(y_r) = E_{r,1}y_1'(x_1) + E_{r,2}y_2'(x_1) + \ldots + E_{r,n}y_n'(x_1)$$
$$x_2'(y_r) = E_{r,1}y_1'(x_2) + E_{r,2}y_2'(x_2) + \ldots + E_{r,n}y_n'(x_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n'(y_r) = E_{r,1}y_1'(x_n) + E_{r,2}y_2'(x_n) + \ldots + E_{r,n}y_n'(x_n)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit $y_r'(x_1)$, $y_r'(x_2) \ldots y_r'(x_n)$ oder mit $y_s'(x_1)$, $y_s'(x_2) \ldots y_s'(x_n)$, so erhält man mit Rücksicht auf (96) und (109) die beiden folgenden:

$$E_{r,1}A_{r,1} + E_{r,2}A_{r,2} + \ldots + E_{r,n}A_{r,n} = 1$$
$$E_{r,1}A_{s,1} + E_{r,2}A_{s,2} + \ldots + E_{r,n}A_{s,n} = 0$$

aus denen, wenn:

$$P^2 = K = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}, \quad Q^2 = H = \begin{vmatrix} E_{1,1} & E_{1,2} & \ldots & E_{1,n} \\ E_{2,1} & E_{2,2} & \ldots & E_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ E_{n,1} & E_{n,2} & \ldots & E_{n,n} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird, folgt:

$$(110.) \qquad KH = 1, \; A_{r,s} = \frac{1}{H}\frac{dH}{dE_{r,s}} \quad , \quad E_{r,s} = \frac{1}{K}\frac{dK}{dA_{r,s}} .$$

Anwendung.

Es bezeichne F eine Funktion der unter sich unabhängigen Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$, und es sei zur Abkürzung:

$$F'(x_r) = X_r \quad , \quad F'(y_r) = Y_r$$

so wird offenbar:

$$X_1 = Y_1y'_1(x_1) + Y_2y'_2(x_1) + \ldots + Y_ny'_n(x_1)$$
$$X_2 = Y_1y'_1(x_2) + Y_2y'_2(x_2) + \ldots + Y_ny'_n(x_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n = Y_1y_1'(x_n) + Y_2y'_2(x_n) + \ldots + Y_ny'_n(x_n)$$

sein. Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit $y_r'(x_1), y_r'(x_2) \ldots y_r'(x_n)$ und addirt die Resultate, so kommt:

$$(111.) \qquad X_1y'_r(x_1) + X_2y'_r(x_1) + \ldots + X_ny'_r(x_n) = L_r$$

wo wegen der Gleichung (109):

$$L_r = Y_1A_{r,1} + Y_2A_{r,2} + \ldots + Y_nA_{r,n}$$

ist, oder auch nach der zweiten der Gleichungen (110):

$$(112.) \qquad HL_r = Y_1\frac{dH}{dE_{r,1}} + Y_2\frac{dH}{dE_{r,2}} + \ldots + Y_n\frac{dH}{dE_{r,n}}$$

Wenn man in der Gleichung (111) $r = 1, 2 \ldots\ldots n$ setzt, so erhält man n Gleichungen, aus denen:

$$(113.)\qquad \begin{aligned} X_1 &= L_1 x'_1(y_1) + L_2 x'_1(y_2) + \ldots\ldots + L_n x'_1(y_n) \\ X_2 &= L_1 x'_2(y_1) + L_2 x'_2(y_2) + \ldots\ldots + L_n x'_2(y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= L_1 x'_n(y_1) + L_2 x'_n(y_2) + \ldots\ldots + L_n x'_n(y_n) \end{aligned}$$

fliessen, und aus der Gleichung (112) folgt leicht:

$$L_1 E_{r,1} + L_2 E_{r,2} + \ldots\ldots + L_n E_{r,n} = Y_r.$$

Differentiirt man die Gleichungen (113) nach der Reihe nach $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ und addirt die Resultate, so erhält man:

$$\Sigma_r \frac{dX_r}{dx_r} = \frac{dL_1}{dy_1} + \frac{dL_2}{dy_2} + \ldots\ldots + \frac{dL_n}{dy_n} + L_1 \Sigma_r \frac{dx'_r(y_1)}{dx} + L_2 \Sigma_r \frac{dx'_r(y_2)}{dx_r} + \ldots\ldots + L_n \Sigma_r \frac{dx'_r(y_n)}{dx_r}$$

oder nach (100):

$$(114.)\qquad Q\left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots\ldots + \frac{dX_n}{dx_n}\right) = \frac{dL_1 Q}{dy_1} + \frac{dL_2 Q}{dy_2} + \ldots\ldots + \frac{dL_n Q}{dy_n}$$

eine Gleichung, welche, wenn man sich erinnert, dass $PQ = 1$ ist, auch die Form:

$$P\Sigma_r \frac{dX_r}{dx_r} = P\left(\frac{dL_1}{dy_1} + \frac{dL_2}{dy_2} + \ldots\ldots + \frac{dL_n}{dy_n}\right) - \left(L_1 \frac{dP}{dy_1} + L_2 \frac{dP}{dy_2} + \ldots\ldots + L_n \frac{dP}{dy_n}\right)$$

annehmen kann; und da aus den Gleichungen (113) durch Multiplication mit $\frac{dP}{dx_1}, \frac{dP}{dx_2} \ldots\ldots \frac{dP}{dx_n}$ und Addition folgt:

$$X_1 \frac{dP}{dx_1} + X_2 \frac{dP}{dx_2} + \ldots\ldots + X_n \frac{dP}{dx_n} = L_1 \frac{dP}{dy_1} + L_2 \frac{dP}{dy_2} + \ldots\ldots + L_n \frac{dP}{dy_n}$$

so kommt durch Substitution:

$$P\left(\frac{dL_1}{dy_1} + \frac{dL_2}{dy_2} + \ldots\ldots + \frac{dL_n}{dy_n}\right) = \frac{dX_1 P}{dx_1} + \frac{dX_2 P}{dx_2} + \ldots\ldots + \frac{dX_n P}{dx_n}.$$

Mittelst der Gleichung (114) erhält man eine allgemeine Transformation der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit $n + 1$ Variabelen:

$$\frac{d^2F}{dx_1^2} + \frac{d^2F}{dx_2^2} + \ldots\ldots + \frac{d^2F}{dx_n^2} = 0$$

eine Transformation, welche in dem Falle von $n = 3$ der von *Jacobi* *) vermittelst der Variationsrechnung gefundenen entspricht, und welche daher als besondere Fälle

*) Mathematische Werke. Band II.

die von *Laplace*, *Lamé* und *Cauchy* *) herrührenden umfasst. Wenn wir $E_{r,s} = 0$ annehmen, so ist:

$$Q = \sqrt{(E_{1,1} E_{2,2} \ldots E_{n,n})}\,, \qquad HL_r = Y_r \frac{dH}{dE_{r,r}}$$

und daher:

$$L_r Q = \frac{\sqrt{(E_{1,1} E_{2,2} \ldots E_{r-1,r-1} E_{r+1,r+1} \ldots E_{n,n})}}{\sqrt{E_{r,r}}} \frac{dF}{dy_r}$$

Es seien:

$$x_1 = y_1 \cos y_2\,,\quad x_2 = y_1 \sin y_2 \cos y_3\,,\quad x_3 = y_1 \sin y_2 \sin y_3 \cos y_4 \ldots\ldots$$
$$x_{n-1} = y_1 \sin y_2 \sin y_3 \ldots\ldots \sin y_{n-1} \cos y_n\,,\quad x_n = y_1 \sin y_2 \sin y_3 \ldots\ldots \sin y_n$$

so wird sich leicht $E_{r,s} = 0$ ergeben, und:

$$E_{1,1} = 1\,,\quad E_{2,2} = y_1^2\,,\quad E_{3,3} = y_1^2 \sin^2 y_2\,,\quad E_{4,4} = y_1^2 \sin^2 y_2 \sin^2 y_3 \ldots\ldots$$
$$E_{n,n} = y_1^2 \sin^2 y_2 \sin^2 y_3 \ldots\ldots \sin^2 y_{n-1}$$

und daher:

$$L_1 Q = y_1^{n-1} \sin^{n-2} y_2 \sin^{n-3} y_3 \ldots\ldots \sin y_{n-1} \frac{dF}{dy_1}$$

$$L_2 Q = y_1^{n-3} \sin^{n-2} y_2 \sin^{n-3} y_3 \ldots\ldots \sin y_{n-1} \frac{dF}{dy_2}$$

$$L_3 Q = y_1^{n-3} \sin^{n-4} y_2 \sin^{n-3} y_3 \ldots\ldots \sin y_{n-1} \frac{dF}{dy_3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L_r Q = y_1^{n-3} \sin^{n-4} y_2 \sin^{n-5} y_3 \ldots\ldots \sin^{n-r-1} y_{r-1} \sin^{n-r} y_r \ldots\ldots \sin y_{n-1} \frac{dF}{dy_r}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

In dem Falle $n = 3$ erhält man:

$$\frac{d^2F}{dx_1^2} + \frac{d^2F}{dx_2^2} + \frac{d^2F}{dx_3^2} = \sin y_2 \frac{d\, y_1^2 \frac{dF}{dy_1}}{dy_1} + \frac{d \sin y_2 \frac{dF}{dy_2}}{dy_2} + \frac{1}{\sin y_2} \frac{d^2F}{dy_3^2} = 0$$

was die bekannte Transformation von *Laplace* ist.

Aus der zweiten der Gleichungen (109) fliesst mittelst Differentiation die folgende:

*) Journal de l'École Polytechnique. Cahier. 23. — Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique. Tome deuxième.

$$(115.)\quad x_1'(y_s)\frac{dx_1'(y_r)}{dy_m} + x_2(y_s)\frac{dx_2'(y_r)}{dy_m} + \ldots\ldots + x_n'(y_s)\frac{dx_n'(y_r)}{dy_m} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dE_{r,s}}{dy_m} + \frac{dE_{m,s}}{dy_r} - \frac{dE_{r,m}}{dy_s}\right)$$

und aus dieser ergeben sich, wenn man:

$$M_s = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dE_{r,s}}{dy_m} + \frac{dE_{m,s}}{dy_r} - \frac{dE_{r,m}}{dy_s}\right)$$

setzt:

$$(116.)\quad \begin{aligned}
\frac{dx_1'(y_r)}{dy_m} &= M_1y_1'(x_1) + M_2y_2'(x_1) + \ldots\ldots + M_ny_n'(x_1)\\
\frac{dx_2'(y_r)}{dy_m} &= M_1y_1'(x_2) + M_2y_2'(x_2) + \ldots\ldots + M_ny_n'(x_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_n'(y_r)}{dy_m} &= M_1y_1'(x_n) + M_2y_2'(x_n) + \ldots\ldots + M_ny_n'(x_n)
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Determinante:

$$V = \begin{vmatrix}
X_1 & X_{1,1} & X_{1,2} & \ldots\ldots & X_{1,n}\\
X_2 & X_{2,1} & X_{2,2} & \ldots\ldots & X_{2,n}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
X_n & X_{n,1} & X_{n,2} & \ldots\ldots & X_{n,n}\\
0 & X_1 & X_2 & \ldots\ldots & X_n
\end{vmatrix}$$

in der $X_{s,r} = X_{r,s} = \dfrac{dX_r}{dx_s}$ ist, und bemerken, dass sie aus dem Produkt der beiden folgenden entstehen kann:

$$\begin{vmatrix}
Y_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n}\\
Y_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
Y_n & a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n}\\
0 & X_1 & X_2 & \ldots\ldots & X_n
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
y_1'(x_1) & y_1'(x_2) & \ldots\ldots & y_1'(x_n) & 0\\
y_2'(x_1) & y_2'(x_2) & \ldots\ldots & y_2'(x_n) & 0\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
y_n'(x_1) & y_n'(x_2) & \ldots\ldots & y_n'(x_n) & 0\\
0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1
\end{vmatrix}$$

wo in der ersten $a_{r,s} = \dfrac{dX_r}{dy_s}$ gesetzt ist. Multiplicirt man die erste dieser Determinanten mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & x'(y_1) & x_2'(y_1) & \ldots & x_n'(y_1) \\ 0 & x_1'(y_2) & x_2'(y_2) & \ldots & x_n'(y_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_1'(y_n) & x_2'(y_n) & \ldots & x_n'(y_n) \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

und setzt:

$$(117.) \qquad a_{1,r}x_1'(y_s) + a_{2,r}x_2'(y_s) + \ldots + a_{n,r}x_n'(y_s) = h_{r,s}$$

so erhält man:

$$S = \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \ldots & h_{1,n} & Y_1 \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \ldots & h_{2,n} & Y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \ldots & h_{n,n} & Y_n \\ Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_n & 0 \end{vmatrix}$$

und da zufolge der ausgeführten Operationen offenbar $S = VQ^2$ ist, so wird:

$$V = \frac{S}{H}$$

sein.

Wir bemerken, dass durch Differentiation der Gleichung:

$$Y_s = X_1x_1'(y_s) + X_2x_2'(y_s) + \ldots + X_nx_n'(y_s)$$

nach y_r, wegen der Gleichungen (111), (116) und (117) folgt:

$$Y_{s,r} = Y_{r,s} = h_{r,s} + \tfrac{1}{2}\Sigma_m L_m \left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r} + \frac{dE_{r,m}}{dy_s} - \frac{dE_{s,r}}{dy_m}\right)$$

woraus:

$$h_{r,s} = Y_{r,s} - \tfrac{1}{2}\Sigma_m L_m \left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r} + \frac{dE_{r,m}}{dy_s} - \frac{dE_{s,r}}{dy_m}\right)$$

folgt. Mithin ist der Ausdruck V durch Y_1, Y_2 ..... $E_{r,s}$ und ihre Differentialquotienten ausgedrückt.

Wenn wir in dem Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma_m L_m \left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r} + \frac{dE_{r,m}}{dy_s} - \frac{dE_{s,r}}{dy_m}\right)$$

für L_m seinen Werth (112) substituiren, so kommt:

$$\frac{1}{H}\Sigma_i Y_i \Sigma_m \tfrac{1}{2}\left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r} + \frac{dE_{r,m}}{dy_s} - \frac{dE_{s,r}}{dy_m}\right)\frac{dH}{dE_{m,i}}$$

und da nach (109) und (115) die Determinante:

$$\Sigma_m \tfrac{1}{2} \left(\frac{dE_{s,m}}{dy_r} + \frac{dE_{r,m}}{dy_s} - \frac{dE_{s,r}}{dy_m} \right) \frac{dH}{dE_{m,i}}$$

aus dem Produkt der beiden:

$$Q \cdot \begin{vmatrix} x_1'(y_1)\ x_1'(y_2) \ldots\ldots x_1'(y_{i-1}) & \frac{dx_1'(y_s)}{dy_r} & x_1'(y_{i+1}) \ldots\ldots x_1'(y_n) \\ x_2'(y_1)\ x_2'(y_2) \ldots\ldots x_2'(y_{i-1}) & \frac{dx'(y_s)}{dy_r} & x_2'(y_{i+1}) \ldots\ldots x_2'(y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'(y_1)\ x_n'(y_2) \ldots\ldots x_n'(y_{i-1}) & \frac{dx_n'(y_s)}{dy_r} & x_n'(y_{i+1}) \ldots\ldots x_n'(y_n) \end{vmatrix}$$

entsteht, so kommt, wenn man diese letzte Determinante mit ${}^{(i)}N_{s,r}$ bezeichnet:

$$h_{r,s} = Y_{r,s} - \frac{1}{Q} \Sigma_i Y_i \, {}^{(i)}N_{s,r}.$$

Wenn wir $Y_1 = Y_2 = \ldots\ldots = Y_{n-1} = 0$ $Y_n = 1$ annehmen, so erhalten wir:

$$S = \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \ldots\ldots & h_{1,n-1} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \ldots\ldots & h_{2,n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & \ldots\ldots & h_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad h_{r,s} = -\frac{1}{Q} \, {}^{(n)}N_{s,r}$$

und setzt man ${}^{(n)}N_{s,r} = k_{s,r} = k_{r,s}$, so ist:

$$V = \frac{1}{(-Q)^{n+1}} \begin{vmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \ldots\ldots & k_{1,n-1} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \ldots\ldots & k_{2,n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{n-1,1} & k_{n-1,2} & \ldots\ldots & k_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

eine Gleichung, aus welcher man für $n = 3$ den bekannten Ausdruck von *Gauss* für die Krümmung einer Oberfläche erhält.*)

Aus der Gleichung (102) folgen zwei Formeln, welche in der Theorie der Functionaldeterminanten von grossem Nutzen sind. Wenn man aus s, beliebig unter den Gleichungen:

(118.) $y_1(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = y_1$, $y_2(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = y_2, \ldots\ldots y_n(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = y_n$

gewählten Gleichungen, die Werthe von $x_{r+1}, x_{r+2} \ldots\ldots x_{r+s}$ bestimmt und diese Werthe in die anderen $n - s$ substituirt, so ergeben sich:

---

*) Nouveaux Mémoires de la Société Royale des Sciences de Gottingue. T. VI.

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 = y_1 - y_1\,(x_1, \ldots\ldots x_r,\ y_{r+1}, \ldots\ldots y_{r+s},\ x_{r+s+1} \ldots\ldots x_n) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_r = y_r - y_1\,(x_1, \ldots\ldots x_r,\ y_{r+1}, \ldots\ldots y_{r+s},\ x_{r+s+1} \ldots\ldots x_n) = 0\\
&\varphi_{r+1} = y_{r+1} - y_{r+1}\,(x_1,\ x_2 \ldots\ldots x_n) = 0\\
(119.)\quad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{r+s} = y_{r+s} - y_{r+s}\,(x_1,\ x_2 \ldots\ldots x_n) = 0\\
&\varphi_{r+s+1} = y_{r+s+1} - y_{r+s+1}\,(x_1 \ldots\ldots x_r,\ y_{r+1} \ldots\ldots y_{r+s},\ x_{r+s+1} \ldots\ldots x_n) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_n = y_n - y_n\,(x_1 \ldots\ldots x_r,\ y_{r+1} \ldots\ldots y_{r+s},\ x_{r+s+1} \ldots\ldots x_n) = 0.
\end{aligned}
$$

Aus der Form der Functionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots$ ist offenbar:

$$\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\ldots\ldots\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right) = \frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\ldots\ldots\frac{d\varphi_n}{dy_n}$$

und da $\dfrac{d\varphi_r}{dy_r} = 1$ ist, so wird:

$$\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\ldots\ldots\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right) = 1$$

sein.

Da nun ausserdem:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dx_{r+1}} = \frac{d\varphi_2}{dx_{r+1}} = \ldots\ldots = \frac{d\varphi_r}{dx_{r+1}} = \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+1}} = \ldots\ldots = \frac{d\varphi_n}{dx_{r+1}} = 0\\
&\frac{d\varphi_1}{dx_{r+2}} = \frac{d\varphi_2}{dx_{r+2}} = \ldots\ldots = \frac{d\varphi_r}{dx_{r+2}} = \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+2}} = \ldots\ldots = \frac{d\varphi_n}{dx_{r+2}} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi_1}{dx_{r+s}} = \frac{d\varphi_2}{dx_{r+s}} = \ldots\ldots = \frac{d\varphi_r}{dx_{r+s}} = \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+s}} = \ldots\ldots = \frac{d\varphi_n}{dx_{r+s}} = 0
\end{aligned}
$$

sind, so erhält man:

$$
\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\ldots\ldots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right) =
\begin{vmatrix}
\frac{d\varphi_1}{dx_1} & \ldots\ldots & \frac{d\varphi_1}{dx_r} & \frac{d\varphi_1}{dx_{r+s+1}} & \ldots\ldots & \frac{d\varphi_1}{dx_n}\\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots\\
\frac{d\varphi_r}{dx_1} & \ldots\ldots & \frac{d\varphi_r}{dx_r} & \frac{d\varphi_r}{dx_{r+s+1}} & \ldots\ldots & \frac{d\varphi_r}{dx_n}\\
\frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_1} & \ldots\ldots & \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_r} & \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_{r+s+1}} & \ldots\ldots & \frac{d\varphi_{r+s+1}}{dx_n}\\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots\\
\frac{d\varphi_n}{dx_1} & \ldots\ldots & \frac{d\varphi_n}{dx_r} & \frac{d\varphi_n}{dx_{r+s+1}} & \ldots\ldots & \frac{d\varphi_n}{dx_n}
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
\frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{r+1}} & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{r+2}} & \ldots\ldots & \frac{d\varphi_{r+1}}{dx_{r+s}}\\
\frac{d\varphi_{r+2}}{dx_{r+1}} & \frac{d\varphi_{r+2}}{dx_{r+2}} & \ldots\ldots & \frac{d\varphi_{r+2}}{dx_{r+s}}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots\\
\frac{d\varphi_{r+s}}{dx_{r+1}} & \frac{d\varphi_{r+s}}{dx_{r+2}} & \ldots\ldots & \frac{d\varphi_{r+s}}{dx_{r+s}}
\end{vmatrix}
$$

Da nun ferner nach der Gleichung (119):

$$\frac{d\varphi_r}{dx_s} = -y_r'(x_s)$$

ist, so wird man, wenn man sich der Gleichung (102) erinnert, die folgende Gleichung haben:

$$P = \Sigma(\pm(y_1'(x_1)) \ldots (y_r'(x_r))(y'_{r+s+1}(x_{r+s+1})) \ldots (y_n'(x_n)))\ \Sigma(\pm y'_{r+1}(x_{r+1}) \ldots y'_{r+s}(x_{r+s}))$$

wo in der ersten Determinante auf der rechten Seite $y_1'(x_1)$, $y_2'(x_2)$ ..... in Klammern gesetzt sind, weil $y_1, y_2 \ldots y_r, y_{r+s+1} \ldots y_n$ als Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_r, y_{r+1} \ldots y_{r+s}, x_{r+s+1} \ldots x_n$ angesehen werden. Ganz analog wird man:

(120.) $$P = \Sigma(\pm(y'_{r+1}(x_{r+1}))(y'_{r+2}(x_{r+2})) \ldots (y'_{r+s}(x_{r+s})))\ \Sigma(\pm y_1'(x_1) \ldots y_r'(x_r) y'_{r+s+1}(x_{r+s+1}) \ldots y_n'(x_n))$$

erhalten.

Wenn wir in dieser letzten $s = 1$ setzen, so ist:

(121.) $$P = (y'_{r+1}(x_{r+1})) \cdot \alpha_{r+1,r+1}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass aus der ersten von den Gleichungen (118) der Werth von x_1 als Function von $y_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ bestimmt und in die anderen substituirt sei; aus der zweiten der Werth von x_2 als Function von $y_1, y_2, x_3, x_4 \ldots x_n$, und in die folgenden eingesetzt, und sofort. Die Gleichungen werden dann die Form:

(122.)
$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= y_1 - y_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \\
\varphi_2 &= y_2 - y_2(y_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \\
\varphi_3 &= y_3 - y_2(y_1, y_2 \ldots x_n) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_n &= y_n - y_n(y_1, y_2 \ldots y_{n-1}, x_n) = 0
\end{aligned}$$

annehmen, und da sich aus ihnen offenbar:

(123.)
$$\Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2} \ldots \frac{d\varphi_n}{dy_n}\right) = 1, \quad \frac{d\varphi_r}{dy_r} = -(y_r'(x_r))$$

$$\Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2} \ldots \frac{d\varphi_n}{dx_n}\right) = \frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2} \ldots \frac{d\varphi_n}{dx_n}$$

ergiebt, so wird auch nach (102):

(124.) $$P = (y_1'(x_1))(y_2'(x_2)) \ldots (y_n'(x_n))$$

sein, wo auch in dieser letzten Gleichung die Klammern die Zusammensetzung von $y_1, y_2 \ldots y_n$ andeuten.

Anwendung.

Es bezeichne $A_{r,s}$ die Determinante:

$$\Sigma(\pm y_1'(x_1)\, y_2'(x_2) \ldots\ldots y_m'(x_m)\, y'_{m+r}(x_{m+s})).$$

Wenn man in die Function y_{m+r} anstatt der Variabelen $x_1, x_2 \ldots\ldots x_m$ die Variabelen $y_1, y_2 \ldots\ldots y_m$ einführt, so ist nach der Formel (121):

$$A_{r,s} = (y'_{m+r}(x_{m+s}))\ \Sigma(\pm y_1'(x_1)\, y_2'(x_2) \ldots\ldots y_m'(x_m))$$

und daher wird:

$$\Sigma(\pm A_{1,1} A_{2,2} \ldots\ldots A_{n-m,n-m}) = \{\Sigma(\pm y_1'(x_1) \ldots\ldots y_m'(x_m))\}^{n-m}\, \Sigma(\pm (y'_{m+1}(x_{m+1})) \ldots\ldots (y_n'(x_n)))$$

sein, und mit Rücksicht auf (120):

$$\Sigma(\pm A_{1,1} A_{2,2} \ldots\ldots A_{n-m,n-m}) = P \cdot \{\Sigma(\pm y_1'(x_1)\, y_2'(x_2) \ldots\ y_m'(x_m))\}^{n-m-1}$$

Nehmen wir an, dass:

$$y_r = a_{r,1} x_1 + a_{r,2} x_2 + \ldots\ldots + a_{r,n} x_n$$

so ist:

$$A_{r,s} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,m} & a_{1,m+s} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,m} & a_{2,m+s} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots\ldots & a_{m,m} & a_{m,m+s} \\ a_{m+r,1} & a_{m+r,2} & \ldots\ldots & a_{m+r,m} & a_{m+r,m+s} \end{vmatrix}$$

und daher:

$$\Sigma(\pm A_{1,1} A_{2,2} \ldots\ldots A_{n-m,n-m}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots\ldots & a_{m,m} \end{vmatrix}^{n-m-1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Die in dieser Formel ausgedrückte Eigenschaft ist von Herrn ***Sylvester*** *) gefunden. Wenn man in der obigen Gleichung $m = n-2$ setzt, so erhält man eine Gleichung, die ein besonderer Fall der Gleichung (14) des §. 3 ist.

Es ist klar, dass, wenn die Functionen $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$ nicht unabhängig von einander, sondern durch die Gleichung:

$$\varphi(y_1, y_2 \ldots\ldots y_n) = 0$$

---

*) Philosophical Magazine. 1851.

verbunden sind, die Determinante P gleich Null ist. Dies folgt aus der Bemerkung, dass n Gleichungen analog mit:

$$\frac{d\varphi}{dy_1} y_1'(x_r) + \frac{d\varphi}{dy_2} y_2'(x_r) + \ldots + \frac{d\varphi}{dy_n} y_n'(x_r) = 0$$

stattfinden, weshalb P gleich Null sein muss.

Vermittelst der Gleichung (121) können wir auch den umgekehrten Satz beweisen; nämlich: wenn die Determinante P gleich Null ist, so sind die Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$ nicht von einander unabhängig. Wir wollen annehmen, dass dieser Satz für die Determinante der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $\alpha_{r,r}$ gelte, und wollen beweisen, dass er dann auch für die Determinante P gilt; dass also dieser Satz allgemein richtig ist, wenn er richtig ist für $n = 2$. Wir bemerken, dass, wenn $P = 0$ ist, nach der Gleichung (121) entweder $(y_r'(x_r))$ oder $\alpha_{r,r}$ gleich Null sein muss. In dem zweiten Falle würden nach unserer Annahme $y_1, y_2 \ldots y_{r-1}, y_{r+1} \ldots y_n$ nicht von einander unabhängig sein; dies kann aber wegen der Art, in welcher die Gleichung (121) gefunden wurde, nicht sein; mithin muss $(y_r'(x_r)) = 0$ sein, das heisst, y_r muss sich vermittelst der Funktionen $y_1, y_2 \ldots y_{r-1}, y_{r+1} \ldots y_n$ ausdrücken lassen und die Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$ sind nicht unabhängig von einander.

Nun ist aber die Determinante der zweiten Ordnung:

$$y_1'(x_1) y_2'(x_2) - y_1'(x_2) y_2'(x_1)$$

nach der Gleichung (121) gleich mit:

$$(y_1'(x_1)) y_2'(x_2)$$

und da die Function y_2 im Allgemeinen die Variabele x_2 enthalten wird, so wird, wenn die Determinante gleich Null ist $(y_1'(x_1))$ verschwinden müssen, und daher werden die Functionen y_1, y_2 nicht von einander unabhängig sein.

Die Formel (102) giebt den Werth der Determinante P, wenn unter den n Variabelen x und den n Functionen y n Gleichungen $\varphi = 0$ bestehen. Wir wollen nun annehmen, dass die Anzahl der Functionen y und der Gleichungen $\varphi = 0$ grösser sei, als die Anzahl der Variabelen x und den Werth der Determinante P bestimmen. Es seien:

$$\varphi_1 = 0 \ , \ \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_{n+r} = 0$$

$n + r$ Gleichungen, welche zwischen den n Variabelen x und den Functionen $y_1, y_2 \ldots y_{n+r}$ dieser Variabelen stattfinden. Bestimmt man aus $\varphi_{n+1} = 0, \varphi_{n+2} = 0 \ldots \varphi_{n+r} = 0$ die Werthe von $y_{n+1}, y_{n+2} \ldots y_{n+r}$ und substituirt diese Werthe in die ersten n Gleichungen, so ergeben sich:

$$\varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_n) = 0 \ , \ \varphi_2(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_n) = 0 \ldots \varphi_n(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_n) = 0.$$

Diese n Gleichungen geben nach der Formel (102):

$$(125.)\quad P\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dy_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dy_2}\right)\ldots\left(\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right)\right)=(-1)^n\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dx_2}\right)\ldots\left(\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)\right)$$

in welcher die Differentialquotienten in Klammern gesetzt sind, um die Zusammensetzung von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ anzudeuten. Wir bemerken nun, dass:

$$\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dx_2}\right)\ldots\left(\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)\right)=\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\ldots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)$$

und dass:

$$\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\ldots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\frac{d\varphi_{n+2}}{dy_{n+2}}\ldots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)$$
$$=\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\ldots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\ldots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)$$

da:

$$\left(\frac{d\varphi}{dy_{n+1}}\right)=\left(\frac{d\varphi_2}{dy_{n+1}}\right)=\ldots=\left(\frac{d\varphi_1}{dy_{n+2}}\right)=\ldots=\left(\frac{d\varphi_n}{dy_{n+r}}\right)=0$$

sind.

Ausserdem ist offenbar:

$$\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\ldots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)=\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{dy_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dy_2}\right)\ldots\left(\frac{d\varphi_n}{dy_n}\right)\right)$$
$$\times\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\frac{d\varphi_{n+2}}{dy_{n+2}}\ldots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)$$

daher folgt aus (125):

$$P\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dy_1}\frac{d\varphi_2}{dy_2}\ldots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)=\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\ldots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\frac{d\varphi_{n+1}}{dy_{n+1}}\ldots\frac{d\varphi_{n+r}}{dy_{n+r}}\right)$$

eine Gleichung, welche den Werth der Determinante P giebt.

Wenn $y_1, y_2 \ldots y_n$ zusammengesetzte Functionen der Variabelen $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind, das heisst, Functionen von anderen Functionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ der Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, so ist nach (102) offenbar:

$$P=\Sigma\left(\pm\frac{dy_1}{d\varphi_1}\frac{dy_2}{d\varphi_2}\ldots\frac{dy_n}{d\varphi_n}\right)\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\ldots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)$$

und wenn die Anzahl der Functionen φ grösser ist, als die der Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$, zum Beispiel gleich $m > n$, so ist nach der Gleichung (61) des §. 4.:

$$P=\Sigma\left\{\Sigma\left(\pm\frac{dy_1}{d\varphi_{r_1}}\frac{dy_2}{d\varphi_{r_2}}\ldots\frac{dy_n}{d\varphi_{r_n}}\right)\Sigma\left(\pm\frac{d\varphi_{r_1}}{dx_1}\frac{d\varphi_{r_2}}{dx_2}\ldots\frac{d\varphi_{r_n}}{dx_n}\right)\right\}$$

wo das erste Zeichen Σ die Summe so vieler mit dem hingeschriebenen Ausdruck

analoger Producte darstellt, als man erhält, wenn man anstatt der Indices $r_1, r_2 \ldots r_n$ n beliebige Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3 ..... m setzt.

Wir wollen annehmen, dass zwischen den Variabelen $x_1, x_2 \ldots x_n$ die n Gleichungen:

$$y_1 = \alpha_1 \, , \; y_2 = \alpha_2 \ldots \ldots y_n = \alpha_n$$

gegeben seien, in welchen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ constant sind, und dass sich diese Gleichungen durch eine Transformation auf die Form:

$$\varphi_1(x_1, x_2 .. x_n, \alpha_1, \alpha_2 .. \alpha_n) = \alpha_1, \varphi_2(x_1, x_2 .. x_n, \alpha_1, \alpha_2 .. \alpha_n) = \alpha_2 .. \varphi_n(x_1, x_2 .. x_n, \alpha_1, \alpha_2 .. \alpha_n) = \alpha_n$$

zurückführen lassen.

Die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ können dann als implicite Functionen angesehen werden, und es wird dann nach der Formel (102):

$$P\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{d\alpha_1} - 1\right)\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha_2} - 1\right) \ldots \left(\frac{d\varphi_n}{d\alpha_n} - 1\right)\right) = (-1)^n \Sigma\left(\pm \frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2} \ldots \frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)$$

sein.

Daher wird die Functionaldeterminante P ihren Werth bei der angewandten Transformation dann nicht ändern, wenn:

$$\Sigma\left(\pm\left(\frac{d\varphi_1}{d\alpha_1} - 1\right)\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha_2} - 1\right) \ldots \left(\frac{d\varphi_n}{d\alpha_n} - 1\right)\right) = 1$$

ist, wie es in dem Falle sein würde, in welchem φ_1 nicht α_1 enthielte; φ_2 nicht α_1, α_2 ..... und φ_n nicht $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ enthielte.

Anwendung.

Aus der Gleichung (124) folgt die allgemeine Formel für die Transformation der vielfachen Integrale. Wir betrachten das vielfache Integral der n^{ten} Ordnung:

$$\int^n U dy_1 \, dy_2 \ldots \ldots dy_n$$

und nehmen an, dass $y_1, y_2 \ldots y_n$ mit anderen n Variabelen $x_1, x_2 \ldots x_n$ durch die Gleichungen (122) verbunden seien. Indem wir nun die gewöhnliche Regel für die Transformation der Integrale erweitern (wie allgemein in der Aufsuchung der Formeln für die Transformation der zweifachen und dreifachen Integrale*) geschieht), so ergiebt sich:

$$\int^n U dy_1 \, dy_2 \ldots \ldots dy_n = \int^n U \frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2} \ldots \ldots \frac{d\varphi_n}{dx_n} \cdot dx_1 \, dx_2 \ldots \ldots dx_n$$

*) Bordoni. Lezioni di Calcolo Sublime. Tomo I.

oder auch nach den Gleichungen (123, 124)

$$\int^n U dy_1\, dy_2 \ldots\ldots dy_n = \int^n U \,.\, P dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_n$$

was die verlangte Formel ist. Ganz analog ist:

$$\int^n U dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_n = \int^n U \,.\, Q dy_1\, dy_2 \ldots\ldots dy_n.$$

Diese letzte Gleichung kann zufolge der zweiten der Gleichungen (109) auch geschrieben werden:

$$\int^n U dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_n = \int^n U \,.\, \sqrt{H} \,.\, dy_1\, dy_2 \ldots\ldots dy_n$$

und in der Voraussetzung, dass $E_{r,s} = 0$ sei, wird:

$$\int^n U dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_n = \int^n U \sqrt{(E_{1,1}\, E_{2,2} \ldots\ldots E_{n,n})}\, dy_1\, dy_2 \ldots\ldots dy_n.$$

Wir wollen annehmen, dass die Gleichungen zwischen den Variabelen x, y von der Form:

$$\frac{x_1^2}{y_r - a_1} + \frac{x_2^2}{y_r - a_2} + \ldots\ldots + \frac{x_n^2}{y_r - a_n} = 1$$

seien, in denen a_1, a_2 ..... a_n constant sind. Setzt man:

$$F(z) = (z - y_1)\,(z - y_2) \ldots\ldots (z - y_n) \qquad f(z) = (z - a_1)\,(z - a_2) \ldots\ldots (z - a_n)$$

so ist bekanntlich:

$$x_1^2 = -\frac{F(a_1)}{f'(a_1)} \quad x_2^2 = -\frac{F(a_2)}{f'(a_2)} \ldots\ldots \quad x_n^2 = -\frac{F(a_n)}{f'(a_n)}$$

und daher, wenn man nach y_r differentiirt:

$$x_1 x_1'(y_r) = \tfrac{1}{2}\frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\frac{1}{a_1 - y_r}\,, \quad x_2 x_2'(y_r) = \tfrac{1}{2}\frac{F(a_1)}{f'(a_2)}\frac{1}{a_2 - y_r}\,, \quad \ldots\ldots x_n x_n'(y_r) = \tfrac{1}{2}\frac{F(a_n)}{f'(a_n)}\frac{1}{a_n - y_r}$$

aus denen:

$$x_1'^2(y_r) = -\tfrac{1}{4}\frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\frac{1}{(a_1 - y_r)^2}\,, \quad x_2'^2(y_r) = -\tfrac{1}{4}\frac{F(a_2)}{f'(a_2)}\frac{1}{(a_2 - y_r)^2}\,, \quad \ldots\, x_n'^2(y_r) = -\tfrac{1}{4}\frac{F(a_n)}{f(a_n)}\frac{1}{(a_n - y_r)^2}$$

und:

$$x_1'(y_r) x_1'(y_s) = -\tfrac{1}{4}\frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\frac{1}{(a_1 - y_r)(a_1 - y_s)}\,, \quad \ldots\, x_n'(y_r) x_n'(y_s) = -\tfrac{1}{4}\frac{F(a_n)}{f'(a_n)}\frac{1}{(a_n - y_r)(a_n - y_s)}$$

folgt.

Wenn man sich nun der Gleichungen:

$$-\frac{F'(y_r)}{f(y_r)} = \frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\frac{1}{(a_1-y_r)^2} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)}\frac{1}{(a_2-y_r)^2} + \ldots\ldots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)}\frac{1}{(a_n-y_r)^2}$$

$$0 = \frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\frac{1}{(a_1-y_r)(a_1-y_s)} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)}\frac{1}{(a_2-y_r)(a_2-y_s)} + \ldots\ldots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)}\frac{1}{(a_n-y_r)(a_n-y_s)}$$

erinnert, so folgt:

$$E_{r,s} = 0\ , \quad E_{r,r} = \tfrac{1}{4}\frac{F'(y_r)}{f(y_r)}$$

und daher:

$$\int^n U dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_n = \tfrac{1}{2}\int^n U \frac{\sqrt{(F'(y_1)\,F'(y_2)\ldots\ldots F'(y_n))}}{\sqrt{(f(y_1)f(y_2)\ldots\ldots f(y_n))}}\, dy_1\, dy_2 \ldots\ldots dy_n .$$

Mit Hülfe dieser Formel ist es Herrn *Catalan* gelungen, einige Relationen, welche zwischen den elliptischen Transcendenten bestehen, auf die *Abel*'schen auszudehnen. *)

§. 11. *Hesse's* Determinante.

Es sei u eine ganze homogene Function der n Variabelen x_1, x_2 ..... x_n. Wir bezeichnen mit u_1, u_2 ..... u_n die ersten Differentialquotienten von u nach jeder dieser Variabelen, und mit $u_{1,1}$, $u_{1,2}$ ..... die zweiten Differentialquotienten, so dass also:

$$u_{r,s} = u_{s,r} = \frac{d^2u}{dx_r\, dx_s}$$

ist.

Die Determinante:

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots\ldots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots\ldots & u_{2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \ldots\ldots & u_{n,n} \end{vmatrix}$$

wird „*Hesse's Function*" oder „*Hesse's Determinante*" genannt, wegen des erfolgreichen Gebrauchs, welchen Herr *Hesse* in verschiedenen geometrischen Untersuchungen davon gemacht hat. Diese Determinante wird von einigen Mathematikern durch das Symbol *Hu* dargestellt. Es ist klar, dass, wenn u vom m^{ten} Grade ist, die Determinante v eine homogene Function vom Grade $n(m-2)$ ist.

---

*) Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles. 1841.

Wir wollen annehmen, dass die Variabelen $x_1, x_2 \ldots x_n$ mit n anderen Variabelen $y_1, y_2 \ldots y_n$ durch n lineäre Gleichungen verbunden seien, welche analog sind mit:

$$x_r = a_{1,r}\, y_1 + a_{2,r}\, y_2 + \ldots + a_{n,r}\, y_n$$

und wollen, nach Substitution dieser Werthe in die Function u, setzen:

$$K = \Sigma\left(\pm \frac{d^2u}{dy_1^2}\frac{d^2u}{dy_2^2} \ldots \frac{d^2u}{dy_n^2}\right), \quad P = \Sigma(\pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{n,n})$$

so kommt:

$$K = P^2 . v.$$

In der That, differentiirt man die Function u nach y_r, so ist:

$$\frac{du}{dy_r} = u_1\, a_{r,1} + u_2\, a_{r,2} + \ldots + u_n\, a_{r,n}$$

und differentiirt man diese letzte Gleichung nach y_s und x_s, so kommt:

$$\frac{d^2u}{dy_r dy_s} = \frac{du_1}{dy_s}\, a_{r,1} + \frac{du_2}{dy_s}\, a_{r,2} + \ldots + \frac{du_n}{dy_s}\, a_{r,n}$$

$$\frac{d^2u}{dy_r dx_s} = u_{1,s}\, a_{r,1} + u_{2,s}\, a_{r,2} + \ldots + u_{n,s}\, a_{r,n}.$$

Aus diesen Gleichungen, und aus der bekannten Multiplicationsregel für die Determinanten ergeben sich leicht die Gleichungen:

$$\Sigma\left(\pm \frac{d^2u}{dx_1 dy_1}\frac{d^2u}{dx_2 dy_2} \ldots \frac{d^2u}{dx_n dy_n}\right) = P \cdot v, \quad K = P\Sigma\left(\pm \frac{d^2u}{dx_1 dy_1}\frac{d^2u}{dx_2 dy_2} \ldots \frac{d^2u}{dx_n dy_n}\right)$$

und durch Vergleichung beider mit einander erhält man $K = P^2 . v$. Wenn die Substitution orthogonal ist, das heisst, wenn die Coefficienten $a_{r,s}$ die beiden Gleichungen:

$$a_{r,1}^2 + a_{r,2}^2 + \ldots + a_{r,n}^2 = 1$$

$$a_{r,1}\, a_{s,1} + a_{r,2}\, a_{s,2} + \ldots + a_{r,n}\, a_{s,n} = 0$$

erfüllen, so ist $P = 1$, und daher wird $K = v$.

Nehmen wir an, die Substitution sei beliebig und die Function, in welche u in Folge der Substitution übergeht, enthalte irgend eine der Variabelen $y_1, y_2 \ldots y_n$ nicht, so wird die Determinante v identisch Null sein, weil, wenn die fehlende Variabele y_r wäre, offenbar:

$$\frac{d^2u}{dy_1 dy_r} = \frac{d^2u}{dy_2 dy_r} = \ldots = \frac{d^2u}{dy_n dy_r} = 0$$

sein würde, und daher K identisch Null, und folglich auch v.

Umgekehrt, wenn die Determinante v identisch Null ist, so lässt sich die

Function u mittelst einer linearen Substitution auf eine homogene Function von $n-1$ Variabelen $y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$ reduciren. In der That, wenn $v = 0$ ist, so ist nach Gleichung (14):

$$\frac{dv}{du_{r,r}}\frac{dv}{du_{s,s}} = \left(\frac{dv}{du_{r,s}}\right)^2$$

daher haben die reciproken Elemente der Determinante v einen gemeinsamen Factor M vom $(n-1)(m-2)^{\text{ten}}$ Grade, und bezeichnen wir mit α_r, α_s zwei Constanten, so wird:

$$(126.) \qquad \frac{dv}{du_{r,r}} = \alpha_r^2 . M \ , \ \frac{dv}{du_{r,s}} = \alpha_r \alpha_s M$$

sein.

Da nun u eine homogene Function des m^{ten} Grades ist, so ist bekanntlich:

$$(127.) \qquad \begin{aligned} u_{1,1}x_1 + u_{1,2}x_2 + \ldots\ldots + u_{1,n}x_n &= (m-1)u_1 \\ u_{2,1}x_1 + u_{2,2}x_2 + \ldots\ldots + u_{2,n}x_n &= (m-1)u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\

ist, so wird, sobald der Ausdruck $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ identisch Null ist, auch w' und daher auch w'', w''' ..... $w^{(m)}$ verschwinden, und die obige Entwicklung sich auf $u = w$ reduciren; das heisst, die Function u kann für den Fall, dass v identisch Null ist, auf w, eine homogene Function der $n-1$ Variabelen $y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$ zurückgeführt werden, wie angekündigt war.

Dieser wichtige Satz rührt von Herrn *Hesse* *) her und wird von ihm zum Beweise der beiden folgenden angewandt:

1. Wenn $u = 0$ die homogene Gleichung einer ebenen Curve m^{ter} Ordnung bezeichnet, so ist die Bedingung dafür, dass diese Curve sich auf m durch denselben Punkt gehende Gerade reducire, die, dass die Determinante v identisch Null ist.

2. Wenn $u = 0$ die homogene Gleichung einer Fläche m^{ter} Ordnung bezeichnet, so ist die Bedingung, dass diese Fläche ein Kegel sei, die, dass v identisch Null ist.

Aus den Gleichungen (127) folgt, wenn man $\frac{dv}{du_{r,s}} = U_{r,s}$ setzt:

$$vx_r = (m-1)(U_{1,r}u_1 + U_{2,r}u_2 + \cdots + U_{n,r}u_n)$$

diese Gleichung giebt, nach x_s differentiirt, während die Indices r, s unter sich verschieden angenommen werden:

$$(128.) \qquad v_s x_r = (m-1)\left\{\frac{dU_{1,r}}{dx_s}u_1 + \frac{dU_{2,r}}{dx_s}u_2 + \cdots + \frac{dU_{n,r}}{dx_s}u_n\right\}$$

und nach x_r differentiirt:

$$v_r x_r = (m-2)v + (m-1)\left\{\frac{dU_{1,r}}{dx_r}u_1 + \frac{dU_{2,r}}{dx_r}u_2 + \cdots + \frac{dU_{n,r}}{dx_r}u_n\right\}.$$

Wenn daher $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$ ist, so ist, während $v = 0$ ist, auch $v_r = 0$ für jedes beliebige r; und aus der Gleichung (14) folgt:

$$\frac{dU_{r,r}}{dx_r}U_{s,s} + \frac{dU_{s,s}}{dx_r}U_{r,r} = 2U_{r,s}\frac{dU_{r,s}}{dx_r}$$

eine Gleichung, welche erfüllt wird, wenn man:

$$(129.) \qquad U_{r,r} = Nx_r^2 \quad , \quad U_{r,s} = Nx_r x_s$$

setzt, wo N einen Factor bezeichnet, welcher allen reciproken Elementen der Determinante v gemeinsam ist. Differentiirt man die Gleichung (128) von Neuem nach x_t, so kommt:

---

*) *Crelle*, Journal für die Mathematik. Band 42. 1851.

$$(130.) \quad \begin{aligned} v_{s,i}x_r = (m-1)\left\{\frac{d^2U_{1,r}}{dx_s dx_i}u_1 + \frac{d^2U_{2,r}}{dx_s dx_i}u_2 + \ldots\ldots + \frac{d^2U_{n,r}}{dx_s dx_i}u_n\right\} \\ -(m-1)\left\{U_{1,r}\frac{du_{1,s}}{dx_i} + U_{2,r}\frac{du_{2,s}}{dx_i} + \ldots\ldots + U_{n,r}\frac{du_{n,s}}{dx}\right\} \end{aligned}$$

da in Folge der bekannten Gleichung:

$$U_{1,r}u_{1,i} + U_{2,r}u_{2,i} + \ldots\ldots + U_{n,r}u_{n,i} = 0$$

die Identität:

$$\frac{dU_{1,r}}{dx_s}u_{1,i} + \frac{dU_{2,r}}{dx_s}u_{2,i} + \ldots\ldots + \frac{dU_{n,r}}{dx_s}u_{n,i} = -\left(U_{1,r}\frac{du_{1,s}}{dx_i} + U_{2,r}\frac{du_{2,s}}{dx_i} + \ldots\ldots + U_{n,r}\frac{du_{n,s}}{dx_i}\right)$$

besteht.

Wenn nun $u_1 = u_2 = \ldots\ldots = u_n = 0$ ist, so ist nach (130):

$$v_{s,i}\,x_r = -(m-1)\left\{U_{1,r}\frac{du_{1,s}}{dx_i} + U_{2,r}\frac{du_{2,s}}{dx_i} + \ldots\ldots + U_{n,r}\frac{du_{n,s}}{dx_i}\right\}$$

oder wenn man die Werthe (129) substituirt:

$$v_{s,i} = -(m-1)N\left(x_1\frac{du_{1,s}}{dx_i} + x_2\frac{du_{2,s}}{dx_i} + \ldots\ldots + x_n\frac{du_{n,s}}{dx_i}\right)$$

oder nach einer bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen:

$$v_{s,i} = -(m-1)(m-2)N \cdot u_{s,i}.$$

Hieraus folgt: wenn u_1, u_2 ..... u_n Null sind, so verschwindet nicht nur die „*Hesse'sche Function*" welche zu der Function u gehört, sondern auch diejenige, welche zu der Hesse'schen Function selbst, nämlich zu v gehört. Für den Fall $n = 3$ sind bekanntlich die Gleichungen $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ durch die vielfachen Punkte der, durch die Gleichung $u = 0$ dargestellten, Curve erfüllt; und da für diese Punkte $v = 0$ sein muss, so sind diese Punkte selbst die Durchschnittspunkte der Curven $u = 0$, $v = 0$, und ausserdem geben die Durchschnittspunkte auch die vielfachen Puncte der Curve $v = 0$.

Wir wollen nun annehmen, dass $u = 0$ eine ganze, rationale, algebraische Gleichung vom Grade m zwischen den $n-1$ Variabelen $x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n-1}$ sei und die Determinante:

$$H = \begin{vmatrix} u_1 & u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots\ldots & u_{1,n-1} \\ u_2 & u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots\ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_{n-1} & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \ldots\ldots & u_{n-1,n-1} \\ 0 & u_1 & u_2 & \ldots\ldots & u_{n-1} \end{vmatrix}$$

betrachten.

Wenn man die Gleichung $u = 0$ homogen macht, indem man anstatt der Variabelen $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ setzt $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n} \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}$ und alle Terme mit x_n^m multiplicirt, so bestehen die Gleichungen (127) und ebenso:

$$(131.) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = mu.$$

Mittelst derselben wird man die Determinante H in der folgenden Weise transformiren können. Es ist klar, dass:

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} (m-1)\,u_1 & u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n-1} \\ (m-1)\,u_2 & u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (m-1)\,u_{n-1} & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \ldots & u_{n-1,n-1} \\ 0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{n-1} \end{vmatrix}$$

ist, und da der Werth der Determinante H ungeändert bleibt, wenn man zu den Elementen der ersten Colonne diejenigen der zweiten, multiplicirt mit $-x_1$, addirt und ebenso diejenigen der dritten, multiplicirt mit $-x_2$, u. s. w., so ist zufolge der Gleichungen (127) und (131):

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} x_n u_{1,n} & u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n-1} \\ x_n u_{2,n} & u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n u_{n-1,n} & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \ldots & u_{-1,n-1} \\ x_n u_n - mu & u_1 & u_2 & \ldots & u_{n-1} \end{vmatrix}$$

oder auch:

$$H = -\frac{mu}{m-1} \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n-1} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \ldots & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \frac{x_n}{m-1} \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \ldots & u_{n-1,n} \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{vmatrix}$$

Wir bemerken, dass diese letzte Determinante geschrieben werden kann:

$$\frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \ldots & u_{n-1,n} \\ (m-1)\,u_1 & (m-1)\,u_2 & \ldots & (m-1)\,u_n \end{vmatrix}$$

wiederholt man daher in ihr die oben ausgeführte Operation, so kommt:

$$H = -\frac{m}{m-1}\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots\ldots & u_{1,n-1} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots\ldots & u_{2,n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \ldots\ldots & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1}\frac{x_n^2}{(m-1)^2}\, v$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass für diejenigen Werthe von x_1, x_2 ....., welche die Gleichung $u = 0$ erfüllen, und die Determinante H gleich Null machen, auch $v = 0$ ist.

Anwendung.

Bezeichnet r den Krümmungsradius einer ebenen Curve $u = 0$, so ist:

$$r = \pm\frac{(u_1^2 + u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{H}$$

An den Wendepunkten dieser Curve ist bekanntlich $r = \infty$, und daher $H = 0$, oder nach dem obigen Satze:

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung stellt eine Curve vom $3(m-2)^{\text{ten}}$ Grade dar, welche die gegebene Curve in ihren Wendepunkten schneidet; die Anzahl derselben ist also höchstens: $3m(m-2)$.*)

Bezeichnen r_1, r_2 die Hauptkrümmungsradien einer Fläche $u = 0$, so ist:

$$r_1 r_2 = \frac{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^2}{H}$$

Für diejenigen Punkte der Fläche, für welche einer der Krümmungsradien unendlich ist, ist $H = 0$ und daher:

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} \\ u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Fläche vom $4(m-2)^{\text{ten}}$ Grade dar, und die Durchschnittslinie dieser Fläche mit der Fläche $u = 0$ wird eine Wendecurve oder eine Curve *parabolischer* Punkte für diese Fläche sein.**)

Beispiel. Betrachten wir die Gleichung der Curven dritter Ordnung:

---

*) *Crelle.* Journal für die Mathematik. Band 28. — *Salmon.* On the higher plane curves. pag. 27.

**) *Gergonne.* Annales de Mathématiques. Tome 21. — The Cambridge and Dublin Mathematical Journal 1848, 1849.

$$u = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 6h x_1 x_2 x_3 = 0$$

eine Form, auf welche man bekanntlich die allgemeine Gleichung stets zurückführen kann. Hier ist;

$$v = 6^3 \begin{vmatrix} a_1 x_1 & h x_3 & h x_2 \\ h x_3 & a_2 x_2 & h x_1 \\ h x_2 & h x_1 & a_3 x_3 \end{vmatrix} = 0$$

eine Gleichung, welche man in die Form:

$$h^2(a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3) - k\, x_1 x_2 x_3 = 0$$

bringen kann, wo $k = a_1\, a_2\, a_3 + 2h^3$ ist. Wenn wir die Hesse'sche Function von der linken Seite dieser Gleichung gleich Null setzen, so kommt:

$$3h^2\, k^2(a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3) + (k^3 - 108 a_1\, a_2\, a_3\, h^6) x_1\, x_2\, x_3 = 0$$

eine Gleichung, welche für:

$$3h^2\, k^2 = \lambda + \mu h^2 \qquad k^3 - 108 a_1\, a_2\, a_3\, h^6 = 6\lambda h - \mu k$$

offenbar übergeht in:

$$\lambda u - \frac{1}{6^3}\mu v = 0. \tag{133.}$$

Die Werthe von λ, μ bestimmen sich leicht aus den beiden obigen Gleichungen; nämlich:

$$\lambda = 4h^2(h^3 - a_1\, a_2\, a_3)^2\,, \quad \mu = 8h^6 + 20 a_1\, a_2\, a_3\, h^3 - a_1^2\, a_2^2\, a_3^2.$$

Da der Gleichung (133) offenbar durch solche Werthe von x_1, x_2, x_3 genügt wird, welche $u = 0$, $v = 0$ erfüllen, so folgt die interessante Eigenschaft, dass die Durchschnittspunkte der Curven $u = 0$, $v = 0$ auch für die zweite dieser Curven Wendepunkte sind.*) Diese Eigenschaft findet nur bei den Curven dritter Ordnung statt.

Wir wollen mit w eine ganze, rationale Function der $n-1$ Variabelen z_1, z_2 .... z_{n-1} vom Grade $r-1$ bezeichnen, und setzen:

$$k = \begin{vmatrix} w_1 & w_{1,1} & w_{1,2} & \ldots\ldots & w_{1,n-1} \\ w_2 & w_{2,1} & w_{2,2} & \ldots\ldots & w_{2,n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ w_{n-1} & w_{n-1,1} & w_{n-1,2} & \ldots\ldots & w_{n-1,n-1} \\ 0 & w_1 & w_2 & \ldots\ldots & w_{-1} \end{vmatrix}$$

wenn man die Gleichung $w = 0$ homogen macht, indem man für z_1, z_2 .... z_{n-1} die Verhältnisse:

---

*) *Crelle.* Journal für die Mathematik. Band 28.

$$\frac{z_1}{z_n}, \frac{z_2}{z_n} \ldots\ldots \frac{z_{n-1}}{z_n}$$

substituirt, so kommt:

$$K = -\frac{r}{r-1} w \begin{vmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \ldots\ldots & w_{1,n-1} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \ldots\ldots & w_{2,n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ w_{n-1,1} & w_{n-1,2} & \ldots\ldots & w_{n-1,n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \frac{z_n^2}{(r-1)^2} V$$

wo V die Hesse'sche Function der Function w ist. Wir nehmen an, dass die Variabelen $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ verbunden seien mit den Variabelen $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$ durch die beiden Systeme von Gleichungen:

$$w_1 = x_1 \quad w_2 = x_2 \ldots\ldots w_n = x_n$$
$$u_1 = z_1 \quad u_2 = z_2 \ldots\ldots u_n = z_n$$

so hat man offenbar n^2 Gleirhungen, welche aus den beiden folgenden abgeleitet werden können:

$$w_{1,r} u_{1,r} + w_{2,r} u_{2,r} + \ldots\ldots + w_{n,r} u_{n,r} = 1$$
$$w_{1,s} u_{1,s} + w_{2,s} u_{2,s} + \ldots\ldots + w_{n,s} u_{n,s} = 0$$

indem man r und $s = 1, 2 \ldots\ldots n$ setzt. Nach diesen Gleichungen ist:

$$(134.) \qquad V \cdot v = 1$$

und für diejenigen Werthe von $x_1, x_2 \ldots\ldots; z_1, z_2 \ldots\ldots$, welche die Gleichungen $u = 0$, $w = 0$ erfüllen, wird:

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots\ldots + x_n z_n = 0.$$

Die Gleichung (134) zeigt, dass für $v = \infty$ folgt $V = 0$.

Anwendung.

Für die Rückkehrpunkte einer ebenen Curve $u = 0$ ist $r = 0$, daher nach Gleichung (132) $H = \infty$ und $v = \infty$; oder auch:

$$V = \begin{vmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,3} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,3} \\ w_{3,1} & w_{3,2} & w_{3,3} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Variabelen x_1, x_2, x_3; z_1, z_2, z_3 mit einander durch die Gleichung:

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0$$

verbunden sind, so können z_1, z_2, z_3 *Linear-* oder *Tangential*-Coordinaten darstellen, und $V = 0$ wird eine Curve der $3(r-2)^{\text{ten}}$ Klasse bezeichnen, welche die

Curve, deren Gleichung $u=0$ oder $w=0$ ist, in ihren Rückkehrpunkten schneidet. Daher hat eine Curve der r^{ten} Klasse im Allgemeinen $3r(r-2)$ Rückkehrpunkte.*) Analog ist für solche Punkte einer Fläche, für welche einer der Krümmungsradien Null ist, $V = 0$, und da die Variabelen z_1, z_2, z_3, z_4 die Gleichung erfüllen müssen:

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 + x_4 z_4 = 0$$

so stellen diese Variabelen ***Linear***- oder ***Ebenen***-Coordinaten dar, und $V = 0$ wird eine Fläche der $4(r-2)^{\text{ten}}$ Klasse bezeichnen, deren Durchschnitt mit der Fläche $u = 0$ oder $w = 0$ eine Rückkehrkante für diese letzte Fläche ist.

Wir bemerken, dass sobald V identisch Null ist, die Funktion w nach dem, was oben bewiesen ist, mittelst einer lineären Substitution auf eine homogene Function zwischen $n-1$ Variabelen zurückgeführt werden kann, eine Eigenschaft, welche für $n = 3$ und $n = 4$ die beiden folgenden Sätze liefert:

1. Wenn die Hesse'sche Function der linken Seite der in Tangential-Coordinaten gegebenen Gleichung $w = 0$ einer ebenen Curve identisch Null ist, so stellt diese Gleichung eine Reihe von Punkten dar, die in einer geraden Linie liegen.

2. Wenn die Hesse'sche Function der linken Seite der in Ebenen-Coordinaten gegebenen Gleichung $w = 0$ einer Fläche identisch Null ist, so stellt diese Gleichung eine ebene Curve dar.

Mittelst der Theorie der reciproken Polaren kann man diese beiden Theoreme aus den beiden oben (pag. 96) genannten Sätzen ***Hesse's*** ableiten.

---

*) *Crelle.* Journal für die Mathematik. Band 38.

Druck von J. Petsch in Berlin.

In demselben Verlage sind ferner erschienen:

Meier Hirsch,

Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 7. durchgesehene Ausgabe. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Exemples, Formules et Problèmes du Calcul littéral et l'Algèbre. Traduits de l'allemand sur la quatrième édition. 8. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Fortsetzung der vorstehenden Sammlung, oder Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. 1. Theil. 8. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Sammlung geometrischer Aufgaben:

Erster Theil. (Planimetrie und Trigonometrie). Mit 10 Kupfertafeln. 8. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Zweiter Theil. (Polygonometrie, Stereometrie, sphärische Trigonometrie). Mit 10 Kupfertafeln. 8. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Dritter Theil. (Analytische Geometrie der Ebene), von L. Imm. Magnus. Mit 4 Kupfertafeln. Lexikon 8. $2\frac{5}{6}$ Thlr.

Vierter Theil. (Analytische Geometrie des Raumes), von L. Imm. Magnus. Lexik. 8. 2 Thlr.

Als Fortsetzung und Ergänzung zu Meier Hirsch Sammlung:

Lehmus, Dr. D. C. L., algebraische Aufgaben aus dem ganzen Gebiet der reinen Mathematik mit Angabe der Resultate. Als Ergänzung zu Meier Hirsch Sammlung etc. gr. 8. $\frac{3}{5}$ Thlr.

Commentare zu Meier Hirsch Sammlung etc.

Egen, P. N. C., Handbuch der allgemeinen Arithmetik. Besonders in Beziehung auf d. „Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra von Meier Hirsch." Theil I. Die Buchstabenrechnung. 3. verbesserte Auflage. Mit 1 Kupfer. gr. 8. 2 Thlr.

—— Desselben Werkes Theil II. Die Algebra. 3. verb. Aufl. Mit 4 Kpfr. gr. 8. $2\frac{1}{3}$ Thlr.

Sachs, Sal., Auflösungen der in Meier Hirsch's Sammlung aus der Buchstabenrechnung u. Algebra enthaltenen Gleichungen u. Aufgaben. 7. verbess. Auflage. 8. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Lacroix's Elementarbücher ins Deutsche übersetzt.

Anfangsgründe der Arithmetik. gr. 8. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Anfangsgründe der Algebra. Uebersetzt von I. Ph. Gruson. gr. 8. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Uebersetzt von L. Ideler. gr. 8. Mit 7 Kpfr. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Weitere Ausführung zu seiner Geometrie. Uebersetzt von Elk. Marc. Hahn. Mit 10 Kupfern. gr. 8. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

Anleitung zur ebenen und sphärischen Trigonometrie. Uebersetzt von L. Ideler. Mit 6 Kupfern. Zweite verbesserte Ausgabe. gr. 8. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

Weitere Ausführung hiervon:

Puissant, L., Sammlung verschiedener Aufgaben der Geometrie, aufgelöst und bewiesen durch die algebraische Analysis; übersetzt von Elk. Marc. Hahn. Mit 2 Kupfern. gr. 8. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Ohm, Dr. Mart., der Geist der mathematischen Analysis und ihr Verhältniss zur Schule. Erste Abhandlung. Auch als Anhang und Commentar zu seinen verschiedenen Lehrbüchern. gr. 8. 1842. 1 Thlr.

Plücker, Dr. Jul., System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend. Mit 6 Kupfertafeln. gr. 4. 1835. $3\frac{1}{2}$ Thlr.

Burg, M., Die geometrische Zeichnenkunst oder vollständige Anweisung zum Linearzeichnen, zur Construction der Schatten und zum Tuschen für Künstler u. Technologen, u. zum Selbstunterricht; zunächst zum Gebrauch beim Unterricht in den K. Preussischen Artillerie-Schulen. Zweite durchaus umgearbeitete und verm. Aufl. Mit 30 Figurentafeln. gr. 4. geh. $3\frac{1}{2}$ Thlr.

——— Das Zeichnen und Aufnehmen des Artillerie-Materials oder die geometrische Zeichnenkunst angewendet auf die bildliche Darstellung der Geschütze, Wagen, Maschinen u. s. w. der Artillerie. Zunächst zum Gebrauche beim Unterricht in den K. Preuss. Artillerie-Schulen. Zweite durchaus umgearbeitete Auflage, mit besonderer Berücksichtigung des Zeichnens des neuern Preussischen Feld-Artillerie-Materials, nach den Bestimmungen vom Jahre 1842. Mit 12 Figurentafeln. gr. 4. geh. $3\frac{2}{3}$ Thlr.

——— Das architektonische Zeichnen, oder vollständiger Unterricht in den beim Zeichnen der Architektur-Gegenstände und der Maschinen vorkommenden Constructionen; sowohl hinsichtlich der Anfertigung einer richtigen Linearzeichnung, als der Bestimmung der Schatten. Erster oder theoretischer Theil. (Géométrie descriptive). Weitere Ausführung der Projections- und Schattenlehre in architektonischer Rücksicht. gr. 8. Mit 11 Kupfertaf. in Folio. cart. $5\frac{1}{3}$ Thlr.

Boltze, H. L., Lehrbuch der Statik und Mechanik fester Körper für Schulen und den Selbstunterricht. Mit 4 Kupfertafeln. $\frac{7}{8}$ Thlr.

Gruson, I. Ph., die Kegelschnitte; elementarisch, geometrisch, algebraisch, zum Behuf der Vorlesungen abgehandelt. 8. Mit 5 Kupfern. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Heussi, Jac., Lehrbuch d. Arithmetik für Schulen, Gymnasien und den Selbstunterricht. Enthaltend: Eine gründliche und leicht fassliche, den Erfordernissen der neueren Pädagogik angemessene Darstellung des Kopf- und Zifferrechnens, und deren Anwendung auf das bürgerliche Leben und auf besondere Geschäftszweige. 4 Theile. gr. 8. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

Einzeln:

Erster Theil: Die vier Operationen in ganzen, gebrochenen, unbenannten und benannten Zahlen, enthaltend. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Zweiter Theil: Die Anwendung der vier Operationen enthaltend. $\frac{5}{12}$ Thlr.

Dritter Theil: Eine Sammlung arithmetischer Aufgaben enthaltend. $\frac{5}{12}$ Thlr.

Vierter Theil: Die Resultate aller arithmetischen Aufgaben des dritten Theils enthaltend. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Huberdt, A., Elemente der ebenen Trigonometrie nebst praktischen Aufgaben für Gymnasien und höhere Bürger- und Militair-Schulen. Mit 1 Figurentaf. gr. 8. $\frac{1}{4}$ Thlr.

——— Lehrbuch der Stereometrie für Schulen. Mit 1 Figurentaf. gr. 8. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Lehmus, D. C. L., 300 Aufgaben aus d. höheren und angewandten Mathematik ohne die Auflösungen aber mit Angabe der Resultate. Zur Uebung für Lernende und zur Bequemlichkeit für Lehrer und Examinatoren. Mit 1 Figurentaf. gr. 8. $\frac{3}{4}$ Thlr.

——— Kurzer Leitfaden für den Vortrag der höheren Analysis, höheren Geometrie u. angewandten Mechanik. Mit 1 Figurentaf. gr. 8. 1 Thlr.

——— Die reine Mathematik u. die mechanischen Wissenschaften. Zum Leitfaden für den Lehrer, zur Ergänzung für die Schüler. Mit 1 Figurentaf. gr. 8. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.9432B77T:G C001
THEORIE DER DETERMINANTEN BERLIN
3 0112 017084341

Druck von J. Petsch in Berlin.